Gesche Pospiech[1] [1]TU Dresden
Olaf Uhden[2] [2]Universität Hamburg
Marie-Annette Geyer[1]

Modell der mathematischen Modellierung in der Physik

Mathematik hat für die Physik eine vielfältige Bedeutung. Oft steht die Mathematik als Werkzeug im Vordergrund, das es erlaubt, physikalische Relationen zu quantifizieren. Ferner erfüllt sie wegen der Präzision mathematischer Formulierungen eine kommunikative Funktion (Krey, 2012). Entscheidend sind aber mathematische Konstrukte, die Strukturen zur Beschreibung physikalischer Prozesse zur Verfügung stellen. Die Mathematisierung ermöglicht darüber hinaus logische Herleitungen und Argumentationen, die durch ihre Stringenz die Zuverlässigkeit physikalischer Aussagen oder Vorhersagen erhöhen. Zahlreiche physikalische Konzepte sind zudem inhärent mit mathematischen Operationen oder Funktionen verbunden, wie beispielsweise die Begriffe der Geschwindigkeit oder Beschleunigung. Auch in der historischen Entwicklung zeigt sich, dass die Grundaufgaben der Analysis z. B. zur Zeit Newtons physikalisch formuliert sind und zur Entwicklung von Differentiation und Integration beitrugen. Seither haben sich Mathematik und Physik im Zuge ihrer Entwicklung zwar zunehmend voneinander getrennt, dennoch spielen mathematische Errungenschaften wie die nicht-euklidische Geometrie oder Gruppentheorie eine fundamentale Rolle in der Weiterentwicklung der Physik. Die Modellierung dieses komplexen Wechselspiels kann aus wissenschaftstheoretischer wie auch didaktischer Perspektive erfolgen.

Notwendigkeit von Mathematisierung

Inwieweit lassen sich physikalische und mathematische Modellierung trennen (Borromeo Ferri, 2006)? Sind (z. B. im Unterricht) physikalische Konzepte ohne mathematische Beschreibung denkbar? Als Beispiel kann das ideale Gas dienen. Zunächst ist das Verhalten des physikalischen Objekts "Gas" zu beschreiben. Auf der makroskopischen Ebene werden Beobachtungen und Experimente durchgeführt, die zu Aussagen über Druck, Temperatur oder Volumen führen. Auf mikroskopischer Ebene gelangt man zum Teilchenmodell, das zur Erklärung des Verhaltens von Gasen durch Stöße der Teilchen ohne Mathematik auskommt. Für die Verbindung beider Ebenen wird jedoch die Mathematisierung auf unterschiedlichen Stufen erforderlich: Teilchen werden idealisiert als punktförmig angenommen, funktionale Zusammenhänge, wie: "Je höher die Temperatur, desto höher die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen" oder "Je häufiger die Stöße, desto höher der Druck" werden hergeleitet. Zugleich ist dies ein Beispiel für die Bedeutung des Modellierens als zentrale Methode der Physik.

Beziehung zwischen Physik und Mathematik

Es scheint also, dass mathematische und physikalische Modelle sich nicht strikt trennen lassen, wie es aber meist in den Modellierungskreisläufen angenommen wird (Blum & Leiß, 2005). Die Analysis realer Modellierungsvorgänge zeigt außerdem, dass die Lernenden in der Regel nicht den idealen Kreislauf durchlaufen, sondern jeweils eigene Strategien entwickeln (s. a. Beitrag von Borromeo Ferri). Dies zeigt, dass eine prozessorientierte Analyse des Transfers zwischen Physik und Mathematik notwendig ist. Angestrebt wird also ein Modell, das die strukturelle Rolle der Mathematik für die Physik, d. h. sowohl den Prozess der Mathematisierung als auch den umgekehrten Prozess, das „Lesen“ (Interpretieren) von Gleichungen, in den Fokus stellt. Das Modell von Uhden et al. (2012) geht von dem mathematischen Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß (2005) aus, be-

Erschienen in: S. Bernholt (Hrsg.) (2015). Heterogenität und Diversität - Vielfalt der Voraussetzungen im naturwissenschaftlichen Unterricht. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Bremen 2014. Kiel: IPN.

schreibt aber den Prozess der Mathematisierung im speziellen Kontext der Physik in größerem Detail. Es ist das Ziel, die Lücke zwischen physikalischem und mathematischem Modell aufzuheben und explizit mathematische und physikalische Argumente miteinander zu verbinden (s. Abb 1). Dieses Modell erfüllt mehrere Aufgaben: Es soll erlauben, die strukturelle und die technische Rolle der Mathematik für die Physik, und vor allem auch unterschiedliche Wege der Mathematisierung beim Lehren von Physik zu unterscheiden, wobei die Existenz verschiedener Grade der Mathematisierung betont wird. Besonders die strukturelle Rolle soll Schülern einen Einblick in die Wissenschaft Physik geben und deutlich machen, dass die mathematische Beschreibung inhärenter Teil der Physik ist. Weitere didaktische Ziele sind die bewusste Verständnisorientierung bei der Verwendung der Mathematik, indem physikalische Aussagen explizit mit mathematischen Elementen und Strukturen in Beziehung gesetzt werden.

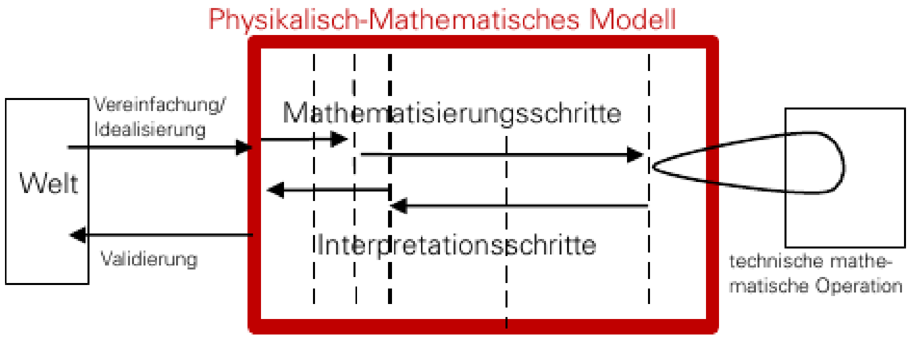


Abbildung 1: Transfermodell Physik-Mathematik (nach Uhden& Karam 2012)

Beispiele für die Anwendung des Modells

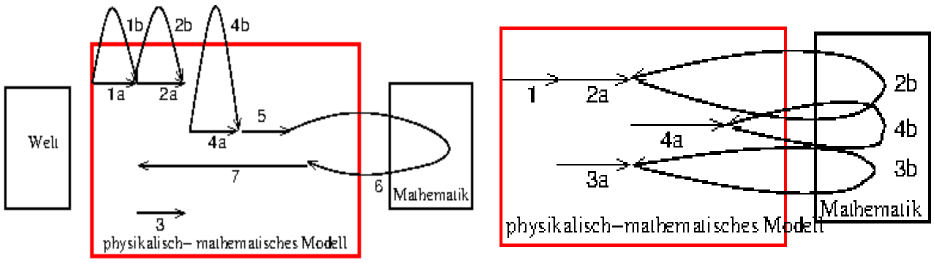
Mithilfe des Modells wurden zum einen Mathematisierungsprozesse beschrieben und zum anderen Probleme von Schülern bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik identifiziert (Uhden, 2012). Wie unterschiedlich je nach Vorkenntnissen und Zielen Mathematisierungsprozesse gestaltet werden können, lässt sich an der Herleitung des Bewegungsgesetzes zum „Freien Fall“ zeigen. Eine „Schritt für Schritt“-Version benutzt nur strukturelle Fähigkeiten, während eine alternative Herleitung auf das zweite Newton’sche Gesetz zurückgreift und anschließend das technische Lösen einer Differentialgleichung erfordert (vgl. Uhden et al., 2012).

Bei der Analyse von Schülerproblemen erlaubt es, z. B. Probleme beim Umgang von “0” oder “1” oder beim Rechnen mit Brüchen abzugrenzen von strukturellen Problemen, die mit der Quantifizierung von Idealisierungen oder der unzureichenden Kenntnis der mathematischen “Grundvorstellungen” zusammenhängen. Andererseits können einige Aspekte der Mathematisierung nicht erfasst werden, wie z. B. der unterschiedliche Status von Formeln:

- Prinzipien/Regeln: m a = F, E_ges = Sum (E_i)
- Definition: z. B. Druck, elektrischer Widerstand
- Spezialgesetze: z. B. hydrostatischer Druck, Ohmsches Gesetz

oder die Bedeutung von Diagrammen als Repräsentation der Resultate von Experimenten oder als Veranschaulichung theoretischer Zusammenhänge. Man kann sich nun fragen, ob das Modell für Planung oder Analyse von Unterricht *(„oder“?)* zur Einführung von Formeln geeignet ist. Kann man besondere Charakteristika im Mathematisierungsprozess mit Formeln oder mögliche Schwierigkeiten identifizieren?

Beispiel 1: Hydrostatischer Druck. Im sächsischen Lehrplan der Klasse 8 spielt der Druck eine wichtige Rolle und wird auch mathematisch beschrieben. Insbesondere wird die Formel für den hydrostatischen Druck hergeleitet (s. Abb 2a). Dies beginnt mit der halbquantitativen Beschreibung (1a) und der Definition (1b) des Drucks, erfordert dann das Erkennen der relevanten Masse (2a) und ihrer Gewichtskraft (2b) sowie ihres Volumens (3). Darauf wird die Masse-Volumen-Beziehung hergestellt (4a) und mit der Formel für die Dichte (4b) kombiniert. Der gebogene Pfeil bedeutet den Rückgriff auf Vorwissen oder externe Quellen. Ein zentraler Schritt ist das Herstellen der Bezüge zwischen den Formeln (5), das formale ineinander Einsetzen (6) sowie die abschließende Interpretation (7).



a) b)

Abbildung 2: a) Ein Muster für einen Mathematisierungsprozess zur Herleitung des Gesetzes über den hydrostatischen Druck. b) für die Linsengleichung

Beispiel 2: Linsengleichung. Dies ist Thema der Klassenstufe 10, in der sie im Praktikum auch experimentell erarbeitet werden kann. Grundlage sind Strahlenmodell sowie die Verbindung von Geometrie (Strahlensatz) und Algebra. Im ersten Schritt (1) wird die Abbildung mit Strahlen repräsentiert, aus denen die Relevanten ausgewählt werden (2a, 3a). Auf diese wird dann jeweils der Strahlensatz angewandt (2b, 3b). Beide Aussagen werden kombiniert (4a) und die entstehende Gleichung umgestellt (4b).

Die beiden Darstellungen möglicher Mathematisierungsprozesse zeigen unterschiedliche Charakteristiken. Während in Abb. 2a oft auf Vorwissen zurückgegriffen wird, benötigt die Herleitung der Linsengleichung in Abb. 2b) mehr technische Fähigkeiten im Umstellen von Formeln. Damit sind dies Beispiele für unterschiedliche Anforderungen an die Schüler, die der Lehrer dann bewusst steuern kann. Zudem werden einzelne Zwischenschritte transparent gemacht, so dass ein bewusstes Vorgehen ermöglicht wird.

Literatur

Blum, W. und Leiß, D. (2005). "filling up"– the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In Working Group 13: Applications and modelling, page 1623.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM, 38(2), 86–95.

Krey, O. (2012). Zur Rolle der Mathematik in der Physik: wissenschaftstheoretische Aspekte und Vorstellungen Physiklernender. Logos, Berlin.

Uhden, O. (2012). Mathematisches Denken im Physikunterricht Theorieentwicklung und Problemanalyse. Berlin: Logos-Verl.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. Science & Education, 21(4), 485-506.