Martin Erik Horn Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin

Dirac-Operator und Lorentz-Operator im didaktischen Vergleich

Vor fast 100 Jahren formulierte Albert Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie (ART). Da dieses Theoriegebäude dadurch wieder stärker in das öffentliche Bewusstsein tritt, stellt sich uns die Frage, wie wir nicht nur die ART, sondern auch ihren mathematischen Aufbau konzeptuell nachvollziehbar darstellen und erläutern können. Auf dieses Problem versucht dieser Beitrag eine Antwort zu geben, die sich an der Geometrischen Algebra nach (Hestenes, 1967 & 2002), (Doran & Lasenby, 2003) orientiert.

Genese und Rezeption der modernen Physik im frühen 20. Jahrhundert

Zehn Jahre vor Veröffentlichung der ART schrieb Einstein 1905 die grundlegenden Arbeiten zur Speziellen Relativitätstheorie (SRT). Allerdings erfolgte die Rezeption dieser Theorie, die einen Pfeiler der modernen Physik darstellt, nicht geradlinig und stringent, sondern ist von Sprüngen und Brüchen durchzogen, die noch heute unsere didaktische Herangehensweise beeinflussen und eine sachangemessene Darstellung der modernen Physik behindern.
Drei wesentliche Ereignisse spielen dabei eine Rolle: Zum einen erschuf Einstein sein Gedankengebäude auf einer sehr phänomenbasierten, konkret an Gedankenexperimenten angelehnten und aus heutiger Sicht vielleicht sogar eklektizistischen Art und Weise. Eine konzeptuell-abstrakte Umformulierung der Ideen Einsteins, anfänglich gar gegen Einsteins ausdrücklichen Widerstand, erfolgte erst in den nachfolgenden Jahren durch Hermann Minkowski, der die Einbettung der SRT in eine vierdimensionale raumzeitliche Welt vorschlug.
Leider konnte Minkowski diese wichtige Arbeit, durch die das Konzept der SRT erst für die moderne Physik erschlossen werden konnte, nicht abschließen. Mitten in seiner Beschäftigung mit der SRT verstarb er am 12. Januar 1909 an einem Blinddarmdurchbruch. Wichtige konzeptuelle Ansätze wurden so erst posthum und trotz aller Bemühungen seiner Kollegen wohl nur bruchstückhaft veröffentlicht. Insbesondere die geometrisch entscheidende Rolle des Lorentz-Operators, die Minkowski zu ergründen suchte, blieb bis heute fast unbeachtet.
Ein zweiter Schlag gegen eine gründliche Aufarbeitung und tiefere Durchdringung der SRT erfolgte mit der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein selbst. Auf einmal traten theoretische und mathematische Konzepte in den Vordergrund, die die SRT mathematisch langweilig und unbefriedigend aussehen ließen. Doch war die SRT dies wirklich? Und welche didaktischen Kosten sind mit diesem Konzeptwechsel für uns verbunden?
Drittens erfolgte 1928 die moderne Formulierung der Quantenmechanik durch Dirac. Die Einführung des Dirac-Operators (Hestenes, 1967, Gl. 1.7), (Lasenby & Doran, 2003, Gl. 6.2)

$$\square = e^{\mu}\partial_{\mu} = e_{\mu}\partial^{\mu} = e_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \quad \text{(unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention)}$$

überdeckte nun vollends eine mögliche Rezeption des Lorentz-Operators (Minkowski 1910, S. 36, Gl. 63 & S. 62 unten), der in der Geometrischen Algebra lautet:

$$\boldsymbol{lor} = \frac{\partial}{\gamma_t c\partial t} + \frac{\partial}{\gamma_x \partial x} + \frac{\partial}{\gamma_y \partial y} + \frac{\partial}{\gamma_z \partial z} = \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Erschienen in: S. Bernholt (Hrsg.) (2015). Heterogenität und Diversität - Vielfalt der Voraussetzungen im naturwissenschaftlichen Unterricht. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Bremen 2014. Kiel: IPN.

Ein Blick auf SRT und ART

Beim Vergleich der mathematischen Struktur von Lorentz- und Dirac-Operator fällt zwangsläufig auf, dass der Lorentz-Operator ein Kind der Speziellen Relativität darstellt, während der Dirac-Operator aufgrund der ko- und kontravarianten Schreibung ein allgemein-relativistisches Konstrukt sein muss. Dies hat auch epistemologische Folgen:

In der SRT verschmelzen Raum und Zeit zu einer gemeinsamen Bühne. Wir beschreiben die Welt damit aus dem Blickwinkel **eines einzigen Koordinatensystems**. In diesem wirken die Koordinatenwerte ct, x, y, z und die Basisvektoren γ_t, γ_x, γ_y, γ_z zusammen:

$$\mathbf{r} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x + y\,\gamma_y + z\,\gamma_z = ct\,\gamma_t + (-x)\,(-\gamma_x) + (-y)\,(-\gamma_y) + (-z)\,(-\gamma_z)$$

Diese von Minkowski durch komplexe Zahlen verfolgte Vereinheitlichung, die im Kontext der Geometrischen Algebra durch eine unterschiedliche Signatur $\gamma_t^2 = -\gamma_x^2 = -\gamma_y^2 = -\gamma_z^2 = 1$ der Basisvektoren mathematisch getragen wird, verschwimmt aus Sicht der ART. Wie ein Betrunkener, der doppelt sieht, bietet uns die ART einen gleichsam doppelten Blick auf die Welt. Mit einem Auge sehen wir die kovariante Perspektive aus dem Blickwinkel der Koordinatenwerte $x_0 = ct$, $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$ und Basisvektoren $e_0 = \gamma_t$, $e_1 = \gamma_x$, $e_2 = \gamma_y$, $e_3 = \gamma_z$. Mit dem anderen Auge sehen wir eine kontravariante Welt aus dem Blickwinkel der Koordinatenwerte $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und Basisvektoren $e^0 = \gamma_t$, $e^1 = -\gamma_x$, $e^2 = -\gamma_y$, $e^3 = -\gamma_z$.

Diese **Doppelung der Koordinatensysteme** spiegelt die ärgerliche Tatsache wider, dass die Natur wohl selbst nicht weiß, ob sie in einem rechtshändigen oder aber in einem linkshändigen Koordinatensystem zu beschreiben ist. Rechts- und linkshändige Koordinatensysteme sind unabdingbar verknüpft und strikt gleichberechtigt. In der Geometrischen Algebra kann dieser Übergang von einem einzigen Koordinatensystem der SRT zu zwei gleichberechtigten Koordinatensysteme der ART elegant durch reziproke Koordinaten (Doran & Lasenby, 2003, Abs. 4.3) beschrieben werden.

Mathematikdidaktisches Intermezzo

Van der Waerden stellt in seiner Abschiedsvorlesung klar, dass die Existenz einer lebendigen, kreativen Mathematik ohne Anregungen aus der Physik undenkbar ist: „Ganze Zweige der klassischen und auch der modernen Mathematik sind nur durch Anregungen aus der Physik und Astronomie entstanden“ (Van der Waerden, 1973, S. 33). Ohne Physik wäre die Mathematik eine gedanklich nahezu tote Wissenschaft.

Was aber passiert mit der Mathematik, wenn Anregungen aus der Physik nicht aufgegriffen werden oder aber überstürzt erfolgen? Genau diese paradoxe Situation trat bei der Rezeption von Allgemeiner und Spezieller Relativitätstheorie in Verbindung mit der Quantenmechanik auf: Der Lorentz-Operator wurde durch nachfolgende Wissenschaftlergenerationen vernachlässigt, während der Dirac-Operator durch eine überstürzte und vorschnelle Einbindung in die mathematische Konzeptbildung eine didaktisch tragfähige Erschließung der zugrunde liegenden Mathematik erschwert.

Diese konzeptuelle Fehlentwicklung wird nicht zuletzt im derzeit üblichen strukturellen Aufbau der Geometrischen Algebra sichtbar. Entweder wird dort die Differentialrechnung wie in (Hestenes, 2002) rein koordinatenfrei und damit auf einem für Lernanfänger sehr anspruchsvollen konzeptuellen Niveau behandelt. Oder aber die Differentialrechnung wird auf Grundlage reziproker Koordinatensysteme mithilfe der allgemein-relativistischen Mathematik unter Bezug auf ko- und kontravarinate Koordinaten durch den Dirac-Operator vermittelt. Diese didaktische Herangehensweise hat somit die fragwürdige Konsequenz, dass die Mathematik der ART mit reziproker Koordinatengestaltung (Lasenby & Doran, 2003, Abs. 4.3) zwingend vor einer Einführung der geometrischen Ableitung (Lasenby & Doran, 2003, Kap. 6) zu behandeln ist. Sollen wir aber tatsächlich einem didaktischen Aufbau folgen, der die Koordinaten-Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie vor Einführung der Geometrischen Ableitung zu behandeln sucht?

Ein Vergleich am Beispiel der Gradientenbildung mithilfe der Geometrischen Ableitung zeigt die Unterschiede der im Schwierigkeitsgrad deutlich differierenden Konzepte. Wird die raumzeitlich geschlossene Kurve $f(x,t) = x_0{}^2 + x_1{}^2 = c^2\, t^2 + x^2$ abgeleitet, so ergibt sich für den Lorentz-Operator links und den Dirac-Operator rechts

$$\boldsymbol{lor}\ f(x,t) = \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t}(c^2 t^2) - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2\,ct\,\gamma_t - 2\,x\,\gamma_x$$

$$\square\ f(x_0, x_1) = e_\mu \partial^\mu x_0{}^2 + e_\mu \partial^\mu x_1{}^2 = 2\,e_\mu \delta_0^\mu\, x_0 + 2\,e_\mu \delta_1^\mu\, x_1 = 2\,x_0\,e_0 + 2\,x_1\,e_1 = 2\,ct\,\gamma_t - 2\,x\,\gamma_x$$

naturgemäß ein gleiches Ergebnis, siehe auch die ausführlichere Darstellung bei Horn (2014). Der Abstraktionsgrad ist im Falle des Dirac-Operators jedoch deutlich höher, insbesondere dann, wenn in die Erörterung der Gradientenbildung auch alternative Darstellungen auf Grundlage der eben betrachteten Kurve $f(x,t) = x_0{}^2 + x_1{}^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 = x_0\, x^0 - x_1\, x^1$, die mit $f(x,t) = g_{00}\, x_0\, x^0 + g_{11}\, x_1\, x^1$ auf den metrischen Tensor vorbereiten, mit einbezogen werden.

Mathematikdidaktische Schlussfolgerung

Es macht sehr viel Sinn, vor einem Erlernen der Mathematik der ART, die üblicherweise erst im hochschulischen Kontext eingeführt wird, die Differentialrechnung zu behandeln, die traditionsgemäß bereits Unterrichtsinhalt der Sekundarstufe II ist. Dies kann in der Geometrischen Algebra nur gelingen, wenn zur Modellierung der geometrischen Ableitung der Lorentz-Operator herangezogen wird. Durch den Lorentz-Operator wird die Differentialrechnung auf Grundlage der Geometrischen Algebra für den schulischen Bereich erschlossen.

Physikdidaktische Schlussfolgerung

In der Physikdidaktik stellt sich uns das Ziel, auf die ART vorzubereiten. Hier kommt dem Lorentz-Operator eine entscheidende Brückenfunktion zu. Erst wenn die Spezielle Relativität auf Grundlage einer speziell-relativistischen Mathematik und somit unter Bezug auf den Lorentz-Operator von den Lernenden verstanden wurde, ist eine Einführung der doppelten Koordinatensichtweise der ART didaktisch zu verantworten. Ist dann ein solches gefestigtes Grundlagenwissen zur Differentialrechnung in der SRT (im Sinne der zuvor aufgeführten mathematikdidaktischen Schlussfolgerung) vorhanden, so wird es bereits im Kontext der SRT möglich, auf die Mathematik der ART hinzuführen und diese zu thematisieren.
Die geometrische Ableitung mithilfe des Lorentz-Operators kann als didaktische Brücke den Sprung von der Schulmathematik (SRT) zur Hochschulmathematik (ART) abfedern.

Literatur

Doran, C., & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press
Hestenes, D. (1967). Real Spinor Fields. Journal of Mathematical Physics, 8 (4), 798-808
Hestenes, D. (2002). New Foundations for Classical Mechanics. New York: Kluwer Academic Publishers
Horn, M. E. (2014). Die Geometrische Ableitung am Beispiel der Maxwell-Gleichungen. Beitrag zur DPG-Frühjahrstagung in Frankfurt. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de
Minkowski, H. (1910). Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Leipzig: Teubner
Van der Waerden, B. L. (1973). Über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik. Elemente der Mathematik, 28, 33-41