

Zur Wirkung von Blades und Non-Blades

Mehr als hundert Jahre nach Formulierung von Spezieller und Allgemeiner Relativitätstheorie ist die konzeptuelle Durchdringung und didaktische Aufarbeitung dieser Theoriegebäude immer noch nicht befriedigend abgeschlossen. Uns gelingt es zwar mühelos, aus zweidimensionaler Information, die von der Netzhaut in unsere Gehirne weitergeleitet wird, ein dreidimensional zufriedenstellendes Abbild unserer Umgebung zu generieren.

Der Relativitätstheorie liegt jedoch eine vierdimensionale Weltbeschreibung zugrunde. Es bleibt die Aufgabe, diese vierdimensionalen Strukturen didaktisch so zu gestalten, dass Lernende ein vertieftes Verständnis für typisch vierdimensionale Effekte erhalten. Es ist somit anzustreben, gerade auch Sachverhalte, die im Dreidimensionalen nicht möglich und damit von uns im nicht-relativistischen Alltag nicht erlebbar sind, Lernenden didaktisch zu öffnen und zugänglich zu machen. Im Idealfall sollte es dann für unsere durch Erfahrung vorgeprägten menschlichen Gehirne – so das Fernziel in einiger Zukunft – möglich sein, aus zweidimensionaler Information ein vierdimensional konzeptuell zufriedenstellendes Abbild relativistischer Situationen zu generieren.

Objekte, die im Dreidimensionalen nicht existieren

In dreidimensionalen Räumen oder Raumzeiten ist jedes n -dimensionale geometrische Objekt (k -Vektor) als äußeres Produkt von k nicht-parallelen Vektoren darstellbar. Solche äußeren Produkte werden Blades genannt. Beispiel dafür ist das in Abbildung 1 links eingezeichnete Flächenstück, das als äußeres Produkt der beiden Vektoren $\sigma_x + 2\sigma_y$ und σ_z dargestellt werden kann. Dabei folgt die mathematische Schreibung den Konventionen der Geometrischen Algebra, siehe (Hestenes 2002), (Lasenby & Doran 2003), (Horn 2012).

In vier- und noch höher-dimensionalen Räumen oder Raumzeiten existieren auch k -Vektoren, die nicht in Form äußerer Produkte geschrieben werden können und als Non-Blades bezeichnet werden (siehe Abb. 1 rechts). Zentrales geometrisches Charakteristikum ist dabei das Schnittverhalten der Konstituenten von Blades und Non-Blades. Die Summe von Flächenstücken mit gemeinsamer **Schnittlinie** bildet ein zweidimensionales Blade. Ein zweidimensionales Non-Blade wird dagegen durch die Summe von Flächenstücken, die lediglich einen gemeinsamen **Schnittpunkt** besitzen, gebildet – eine Situation, die nur in mindestens vierdimensionaler Geometrie zu realisieren ist. Diese Vierdimensionalität wird in der rechten Teilabbildung 1 durch vier senkrecht zueinander stehende Achsen angedeutet, wobei einzelne Achsen entweder raum- oder zeitartig sind.

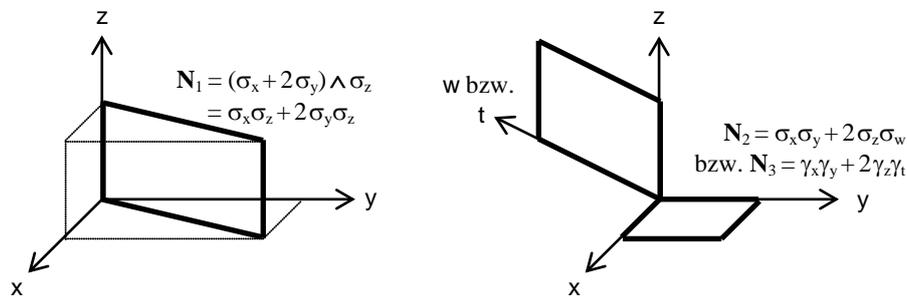


Abb. 1: Beispiel eines zweidimensionalen Blades (links) und Non-Blades (rechts)

Wirkung von Blades und Non-Blades

Blades und Non-Blades können in der Geometrischen Algebra nicht nur als Operanden, auf die eingewirkt wird, sondern auch als Operatoren, die ihrerseits auf Operanden einwirken, interpretiert werden. Dieses Wirkungsverhalten wird im einfachsten Fall mathematisch durch das Sandwich-Produkt modelliert. So führt die rechts- und linksseitige Sandwich-Multiplikation $\mathbf{r}' = -\mathbf{N} \mathbf{r} \mathbf{N}^{-1}$ (Horn 2015) eines Vektors \mathbf{r} mit einem Blade \mathbf{N}_1 auf eine Reflexion des Vektors an der Fläche, die durch dieses Blade repräsentiert wird (siehe Abb. 2 links).

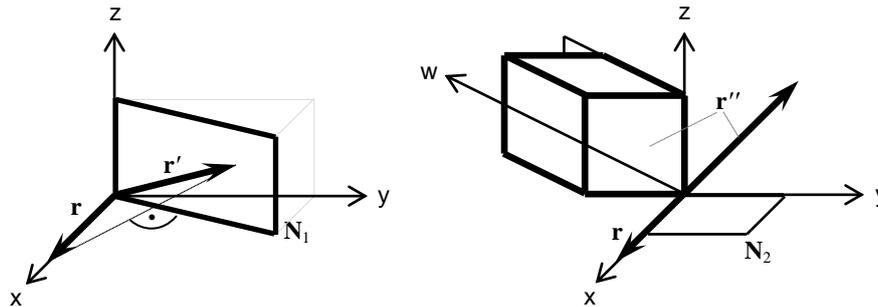


Abb. 2: Beispiel der Operatorwirkung eines Blades (links) und Non-Blades (rechts).

In vierdimensionaler, rein räumlicher Geometrie führt die Sandwich-Multiplikation eines Vektors mit einem zweidimensionalen Non-Blade auf eine hyperbolische Reflexion (siehe Abb. 2 rechts) mit einem erstaunlichen Dimensionsverhalten: Das mathematische Spiegelbild des Vektors konstituiert sich als Linearkombination eines verlängerten Vektors und eines Volumenelements. Länge wird hierbei in Rauminhalt transformiert.

Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie bildet jedoch die vierdimensionale Raumzeit. In einer solchen raumzeitlichen Geometrie führt die Sandwich-Multiplikation eines Vektors mit einem zweidimensionalen Non-Blade auf eine euklidische Reflexion (siehe Abb.3). Und auch dieses Mal bewirkt die mathematische Modellierung eine Dimensionsänderung: Wieder wird Länge in Rauminhalt transformiert, da sich das mathematische Spiegelbild des Vektors als Linearkombination eines verkürzten Vektors und eines Volumenelements konstituiert.

Reflexion des Vektors $\mathbf{r} = 1,8 \sigma_x$ im 3d- und 4d-Raum (siehe Abb. 2):

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{N}_1 \mathbf{r} \mathbf{N}_1^{-1} = -1,08 \sigma_x + 1,44 \sigma_y$$

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{N}_2 \mathbf{r} \mathbf{N}_2^{-1} = -3,00 \sigma_x - 2,40 \sigma_y \sigma_z \sigma_w$$

Reflexion des Vektors $\mathbf{r} = 1,8 \gamma_x$ in der 4d-Raumzeit (siehe Abb. 3):

$$\mathbf{r}''' = -\mathbf{N}_3 \mathbf{r} \mathbf{N}_3^{-1} = -1,08 \gamma_x - 1,44 \gamma_y \gamma_z \gamma_t$$

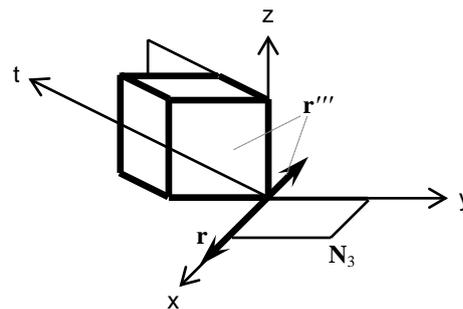


Abb. 3: Beispiel der Operatorwirkung eines Non-Blades im raumzeitlichen Kontext.

Perspektivwechsel und didaktische Umformung

Die Geometrische Algebra verknüpft geometrische und algebraische Sichtweisen zu einem kohärenten Gesamtbild. Diese übergreifende Betrachtung mathematischer und physikalischer Zusammenhänge unterstützt den Lernprozess bei heterogen zusammengesetzten Lern-

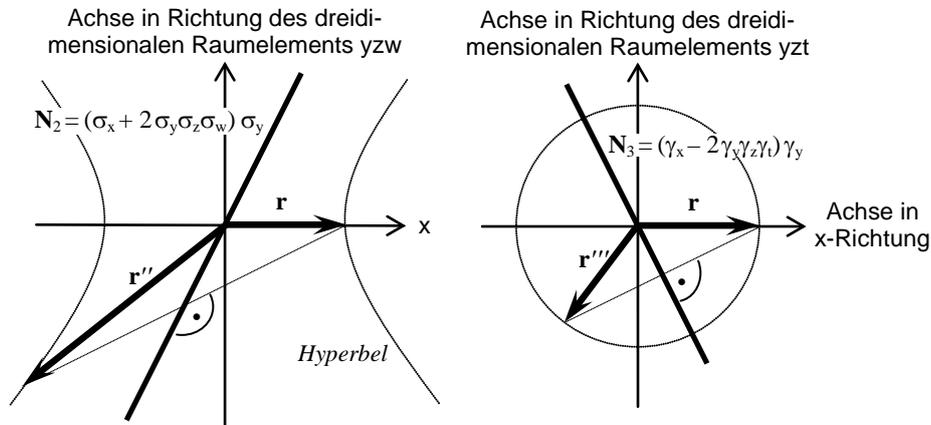


Abb. 4: Darstellung der Beispieloperationen in der mit $\sigma_x^2 = 1$ und $\mathbf{I}_2^2 = (\sigma_y\sigma_z\sigma_w)^2 = -1$ komplexen (links) und der mit $\gamma_x^2 = \mathbf{I}_3^2 = (\gamma_y\gamma_z\gamma_t)^2 = -1$ pseudo-reellen Zahlenebene (rechts).

gruppen, in denen unterschiedliche Lerntypen einen Zugang zu höher-dimensionalen Strukturen suchen. So sind Lernende in diesem Bereich in der Regel entweder algebraisch geprägt und finden einen Zugang vorwiegend über abstrakt-algebraische Beziehungen. Oder sie sind geometrisch geprägt und suchen ein Verständnis durch geometrisch-visuelle Ansätze.

Es ist deshalb sinnvoll, eine Reformulierung des rechts von Abb. 3 gezeigten direkten Zusammenhangs zwischen ursprünglichen und gespiegelten Vektoren aus beiden Blickwinkeln zu erarbeiten. Dieser Perspektivwechsel gelingt durch Übergang zu einer komplexwertigen Beschreibung, wie sie in Abb. 4 gezeigt wird. Hier werden analog zur Gaußschen Darstellung Einheitsvolumina als imaginäre Basisgrößen herangezogen, die dann mit einer weiteren raum- oder zeitartigen Achse die entsprechende Zahlenebene aufspannen.

Parallel zur algebraischen Umgestaltung führt die graphische Veranschaulichung zu einem Bild, in dem die dimensionsändernden Transformationen von Abb. 2 & 3 tatsächlich überzeugend als Reflexionen zu identifizieren sind. In Abb. 4 ist leicht erkennbar, dass die parallel zu den Spiegelflächen N_2 bzw. N_3 liegenden Komponenten des Vektors \mathbf{r} unverändert bleiben, während senkrecht zur Spiegelfläche liegende Komponenten ihr Vorzeichen umkehren. Als Operatoren bewirken auch Non-Blades somit originäre Reflexionen.

Ausblick

In der Relativitätstheorie werden Lorentz-Transformationen als raumzeitliche Rotationen ge- deutet und beschrieben. Rotationen wiederum sind als Aufeinanderfolge zweier Reflexionen darstellbar. Der Übergang von nicht-relativistisch dreidimensionalen zu relativistisch vierdimensionalen Strukturen ist somit auch ein Übergang von Blades zu Non-Blades. Dies führt auf einen didaktischen Zugang zu Lorentz-Transformationen, in denen Zeitdilatation und Längenkontraktion eine alternative Ursache finden: In Raum verwandelte Strecke führt dazu, dass Zeit- und Längendifferenzen mit dann veränderten Maßstäben gemessen werden.

Literatur

- Hestenes, D. (2002). *New Foundations for Classical Mechanics*. New York: Kluwer Academic Publishers
 Doran, C., & Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press
 Horn, M.E. (2012). *Pauli-Algebra und S3-Permutationsalgebra*. London: Bookboon/Ventus Publishing
 Horn, M.E. (2015). *Sandwich Products and Reflections*. Beitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2015 in Wuppertal