Martin Erik Horn HWR Berlin

GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner

Die konzeptuelle Beschreibung der Speziellen Relativitätstheorie basiert auf einer pseudo-Euklidischen Raumzeit, die mathematisch sehr einfach mit Hilfe der Clifford-Algebra modelliert werden kann (Snygg 1997), (Hestenes 1967, 2002), (Doran et al. 2003). Die Berechnung relativistischer Größen ist deshalb im Kontext der Clifford-Algebra auch weit einfacher als unter ausschließlicher Nutzung reeller Zahlen (Hestenes 2003a, b), (Parra Serra 2009).

Für die rechnerische Lösung von Aufgaben zur Speziellen Relativitätstheorie in schulischen und hochschulischen Unterrichtssituationen stehen uns derzeit allerdings nur Taschenrechner zur Verfügung, die keine Berechnungen auf Grundlage der Clifford-Algebra zulassen. Es ist deshalb sinnvoll, für Übungsphasen nach einem Taschenrechner-Ersatz für speziell-relativistische Rechnungen zu suchen.

Das Programm-Tool GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer) bietet eine solche, leicht zugängliche Taschenrechner-Alternative. Ursprünglich für den Einsatz im Rahmen von Problemstellungen der Informatik und zur stabilen Implementation geometrisch-algebraischer Programmierschritte gedacht (Hildenbrand et al. 2010), (Hildenbrand 2013), (Steinmetz 2013), wird GAALOP in letzter Zeit auch immer öfter im Bereich mathematik- oder informatikdidaktischer Problemstellungen beispielsweise im Kontext der Compass Ruler Algebra (Hildenbrand & Oldenburg 2015) oder zur Lösung Linearer Gleichungssysteme (Horn 2017a, b) eingesetzt. So bietet sich auch ein physikdidaktischer Einsatz an.

Mathematischer Kernpunkt und didaktische Brücke zur Speziellen Relativität

Unter Rückgriff auf eine Abituraufgabe aus dem Schuljahr 2008/2009 (Horn 2010a) wird im Folgenden beispielhaft gezeigt, wie eine Fragestellung zur Lorentz-Transformation mit Hilfe des Programm-Tools GAALOP gelöst werden kann. Der mathematische Kernpunkt besteht dabei in der Darstellung von Lorentz-Transformationen, also raumzeitlicher Rotationen, als Hintereinanderfolge zweier raumzeitlicher Reflexionen (Horn 2010b).

Um diese raumzeitlichen Transformationen an alltagsrelevante Erfahrung anknüpfen zu können wird im kommenden Abschnitt zuerst die entsprechende Modellierung einer rein räumlichen Rotation durch zwei aufeinander folgende rein räumliche Reflexionen mit Hilfe von GAALOP als didaktische Brücke vorgestellt.

Räumliche Rotationen mit GAALOP

Eine mögliche Übertragung der später zu diskutierenden Abitur-Teilaufgabe 2.2 d aus (Horn 2010a) in eine entsprechende rein räumliche Fragestellung könnte in etwa lauten:

Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei. Die Inertialsysteme von Dr. Pau und Dr. Wolf befinden sich relativ zueinander in Ruhe. Allerdings sind ihre räumlichen Achsen gegeneinander verdreht.

So misst Dr. Wolf ein Ereignis, das auf der y‘-Achse von Dr. Pau stattfindet, an der Position

$$\mathbf{r_2} = 3 \text{ Lj } \gamma_x + 12 \text{ Lj } \gamma_y$$

Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$\mathbf{r_3}' = 5 \text{ Lj } \gamma_x' + 10 \text{ Lj } \gamma_y'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

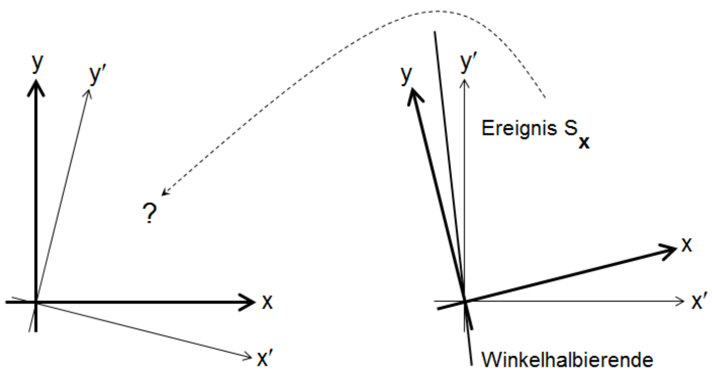

Abb. 1: Skizze einer rein räumlichen Rotation: Wohin wird das Ereignis S transformiert?

Eine graphische Skizzierung dieser Fragestellung wird in Abbildung 1 gezeigt. Dabei bieten sich mehrere Lösungsstrategien an, um eine Rotation sachgerecht zu modellieren. So kann eine erste Reflexion an der Winkelhalbierenden zwischen den beiden y-Achsen erfolgen (siehe Abb. 1), die dann von einer zweiten Reflexion an der y'-Achse von Dr. Pau gefolgt wird. Alternativ dazu kann eine erste Reflexion an der ersten Winkel-Viertelnden zwischen den beiden y-Achsen erfolgen, die dann von einer weiteren Reflexion an der dritten Winkel-Viertelnden zwischen beiden y-Achsen gefolgt wird.

Je nach mathematischen Vorkenntnissen der Lernenden können die Winkel-Teilenden entweder mit Hilfe trigonometrischer Funktionen algebraisch ermittelt werden (siehe Strategien 1 und 2 von Horn 2018). Oder aber die Winkelhalbierenden werden geometrisch durch Addition der die Winkel begrenzenden Einheitsvektoren gebildet (siehe Strategien 3 und 4 von Horn 2018). In diesem Fall wird lediglich zur Normierung die Länge des Ortsvektors auf der y'-Achse von Dr. Pau benötigt. Diese lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras leicht zu $\sqrt{12^2+3^2}$ Lj = $\sqrt{153}$ Lj bestimmen. In Abb. 3 wird im ersten Programmteil die erfolgreiche Umsetzung dieses Ansatzes mit Hilfe von GAALOP gezeigt.

Raumzeitliche Rotationen mit GAALOP

Nach diesen Vorüberlegungen kann die folgende Abitur-Teilaufgabe 2.2 d (Horn 2010a)

> **Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei. Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.**
>
> **Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position**
>
> $$\mathbf{r_2} = 12 \text{ Lj } \gamma_t + 3 \text{ Lj } \gamma_x$$
>
> **Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position**
>
> $$\mathbf{r_3}' = 10 \text{ Lj } \gamma_t' + 5 \text{ Lj } \gamma_x'$$
>
> **statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.**

in Angriff genommen werden. Erneut kann zwischen algebraisch und geometrisch fundierten Lösungsstrategien (Horn 2018) gewählt werden, wobei entweder auf hyperbolische Funktionen oder aber auf entsprechende Normierungen (beispielsweise des Positionsvektors mit Hilfe des relativistischen Pythagoras zu $\sqrt{12^2-3^2}$ Lj = $\sqrt{135}$ Lj) zurückzugreifen ist. Abb. 2 zeigt, dass die Lorentz-Transformation dann durch eine erste Reflexion an der Winkelhalbierenden zwischen den beiden ct-Achsen, gefolgt von einer zweiten Reflexion an der ct'-Ach-

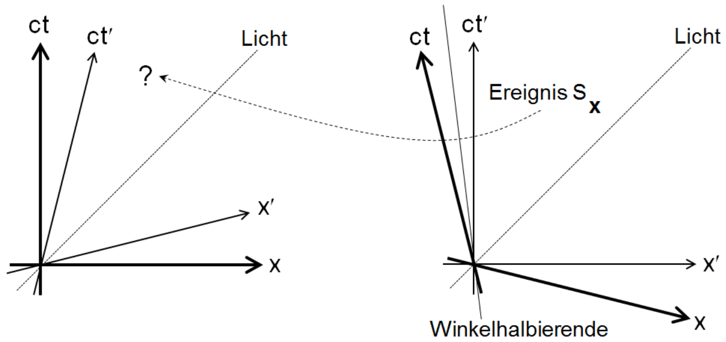

Abb. 2: Skizze einer raumzeitlichen Rotation: Wohin wird das Ereignis S transformiert?

se von Dr. Pau modelliert werden kann. Das mathematische Niveau ist also überschaubar und relativ niedrig, da im Wesentlichen nur einfache Vektoradditionen und Sandwich-Multiplikationen (Horn 2015) durchzuführen sind. Die Programmierung wird in Abb.3 gezeigt.

```
Welcome | abituraufgabe

# RaeuumlicheDrehung;
rEreignis = 5*e2 + 10*e3;
wurzel153 = 12.36931688;
yAchsePAUalt = e3;
yAchsePAUneu = (3*e2 + 12*e3)/wurzel153;
mEINS = yAchsePAUalt + yAchsePAUneu;
nZWEI = yAchsePAUneu;
?rEreignisNEU = nZWEI*mEINS*rEreignis*mEINS*nZWEI/(mEINS*mEINS*nZWEI*nZWEI);

# Lorentz-Transformation;
rSuperPAU = 10*e1 + 5*e2;
wurzel135 = 11.61895004;
ctAchsePAUalt = e1;
ctAchsePAUneu = (12*e1 + 3*e2)/wurzel135;
mEins = ctAchsePAUalt + ctAchsePAUneu;
nZwei = ctAchsePAUneu;
?rSuperWOLF = nZwei*mEins*rSuperPAU*mEins*nZwei/(mEins*mEins*nZwei*nZwei);
```

Abb. 3: Mögliche GAALOP-Programmschritte zur räumlichen und raumzeitlichen Rotation.

Nach Aktivierung des ***Optimize***-Buttons werden die Lösungswerte von GAALOP wie erwartet zu $\mathbf{r}_{\mathbf{EreignisNEU}}$ = 7,28 Lj γ_x + 8,49 Lj γ_y und $\mathbf{r}_{\mathbf{SuperWOLF}}$ = 11,62 Lj γ_t + 7,75 Lj γ_x berechnet. Da das Programm hier lediglich als Taschenrechner-Ersatz genutzt wird, können die restlichen Zeilen der Ausgabe, die eine Einbindung in LaTeX-Programme ermöglichen würden, ignoriert werden. Die Handhabung von GAALOP ist denkbar einfach, nahezu selbsterklärend und darüber hinaus kostengünstig, da das Programm im Internet frei unter www.gaalop.de (Pitt et al. 2008–2017) heruntergeladen werden kann.

Das Programm-Tools GAALOP bietet somit eine effektive und anwenderfreundliche Taschenrechner-Alternative für Rechnungen zur Clifford-Algebra. Auch weitere Themenbereiche werden sich damit in schulischen und hochschulischen Unterrichtssituationen im Rahmen der Clifford-Algebra erschließen lassen.

Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press

Grassmann, H. (1844). Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil; Lineale Ausdehnungslehre. Leipzig: Verlag von Otto Wigand

Hestenes, D. (1967). Real Spinor Fields. Journal of Mathematical Physics, Vol. 8, No. 4, 798-808

Hestenes, D. (2002). New Foundations for Classical Mechanics. Second edition, New York: Kluwer Academic Publishers

Hestenes, D. (2003a). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, 104-121

Hestenes, D. (2003b). Spacetime Physics with Geometric Algebra. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, 691-714

Hildenbrand, D., Pitt, J. & Koch, A. (2010). Gaalop – High Performance Parallel Computing Based on Conformal Geometric Algebra. In E. Bayro-Corrochano & G. Scheuermann (Eds.). Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science. London: Springer-Verlag, 477-494

Hildenbrand, D. (2013). Foundations of Geometric Algebra Computing. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Hildenbrand, D. & Oldenburg, R. (2015). Geometric Algebra: A Foundation of Elementary Geometry with possible Applications in Computer Algebra based Dynamic Geometry Systems. Electronic Journal of Mathematics and Technology, Vol. 9, No. 3, 210-228

Horn, M.E. (2010a): Die Raumzeit-Algebra im Abitur. In H. Grötzebauch & V. Neumeier (Hrsg.). PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover 2010, Beitrag 28.4. URL [21.12.2010] www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/192

Horn, M.E. (2010b): Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. In: A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.). BzMU 2010 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der Jahrestagung der GDM 2010 in München. Münster: WTM-Verlag, 417-420

Horn, M.E. (2011). Grassmann, Pauli, Dirac: Special Relativity in the Schoolroom. In H.-J. Petsche, A.C. Lewis, J. Liesen & S. Russ (Eds.). From Past to Future – Graßmann's Work in Context. Basel, Berlin: Birkhäuser-Verlag, 435-450

Horn, M.E. (2015). Sandwich Products and Reflections. In H. Grötzebauch, V. Nordmeier (Hrsg.). PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal 2015, Beitrag DD 17.7, URL [17.12.2015] www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642

Horn, M.E. (2017a). Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz. Zur Veröffentlichung vorgesehen in Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.). BzMU 2017 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der Jahrestagung der GDM 2017 in Potsdam. Münster: WTM-Verlag

Horn, M.E. (2017b). Übungsblätter zum Modul „Wirtschaftsmathematik“, LV-Nr. 200 601.07, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, Sommersemester 2017

Horn, M.E. (2018). Poster „GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner-Ersatz“ des diesem Paper zugrunde liegenden GDCP-Tagungsbeitrags. Zur Veröffentlichung vorgesehen als Anhang des Beitrags M.E. Horn: Lorentz-Transformationen mit GAALOP. In H. Grötzebauch & V. Nordmeier (Hrsg.). PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Würzburg 2018

Parra Serra, J.M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, 819-834

Pitt, J. Hildenbrand, D., Schwinn, C., Charrier, P. & Steinmetz, C. (GAALOP-Entwicklerteam 2008–2017). Homepage des Geometric Algebra Algorithms Optimizer GAALOP. URL [15.10.2017] www.gaalop.de

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York, Oxford: Oxford University Press

Steinmetz, C. (2013). Examination of new Geometric Algebras Including a Visualization and Integration in a Geometric Algebra Compiler [Untersuchungen neuer geometrischer Algebren mit Visualisierung und Integration in einen Geometrische Algebra Compiler], Master-Thesis vom 24. April 2013, vorgelegt im Studienbereich Computational Engineering der Technischen Universität Darmstadt