

Karel Kok¹
Burkhard Priemer¹

¹Humboldt-Universität zu Berlin

Einführung von Messunsicherheiten im Unterricht

Bei wiederholten Messungen in einem Experiment führen Messunsicherheiten zu einer Varianz in den Messwerten. Oftmals denken die Schüler*innen, dass wiederholte Messungen durchgeführt werden, um einen Mittelwert zu berechnen und dass dieser Mittelwert den „wahren“ Wert des Experiments darstellt. Dies spiegelt eine Punktvorstellung (point-paradigm) der Daten wider (Buffler et al., 2001). Die Varianz in den Messwerten wird hier als (vermeidbarer) Fehler in einem Experiment gesehen. Um die Schüler*innen zu einer Datenbetrachtung im Sinne einer Mengenvorstellung (set-paradigm) zu führen, bei der sie die Varianz korrekt als einen Aspekt der Qualität ihrer Daten und den Mittelwert als beste Schätzung interpretieren, müssen Konzepte der Messunsicherheiten angewendet werden. Viele Schüler*innen haben jedoch Schwierigkeiten mit den Konzepten von Messunsicherheiten (Buffler et al., 2001; Hull et al., 2020; Kok et al., 2019; Kok, 2022; Priemer und Hellwig, 2018). Das Thema Messunsicherheiten wurde zwar kürzlich in den Bildungsstandards im Fach Physik für die allgemeine Hochschulreife (siehe KMK 2020) eingebettet, allerdings wird es in der Schule vermutlich noch eher selten unterrichtet (Kok, 2022; Möhrke, 2020; Priemer und Hellwig, 2018).

In einem Projekt haben wir eine digitale Lernumgebung entwickelt, welche auf dem reduzierten Sachstrukturmodell der Messunsicherheiten von Hellwig (2012) basiert. Diese Lernumgebung hat den gleichen Lernerfolg für die 8. und für die 11. Klasse (Kok, 2022) gezeigt. Eines der Probleme, die die Schüler*innen haben, ist die Berechnung der Unsicherheit, z. B. mit der Standardabweichung (Hellwig, 2012; Séré et al., 1993). Aus diesem Grund haben wir uns in unserer Lernumgebung für ein einfacheres Unsicherheitsmaß entschieden. Alternativ könnte die Berechnung der Standardabweichung automatisiert werden, jedoch bliebe das Verfahren dann für die Schüler*innen eine schwer zu durchschauende Black Box (Zangl und Hoermaier, 2017).

Es bietet sich also an, alternative Quantifizierungen für die Streuung der Messwerte zur Bestimmung der Messunsicherheit zu betrachten, die einfacher zu berechnen sind als die Standardabweichung.

Vergleich alternativer Maße zur Quantifizierung der Unsicherheit

In Kok und Priemer (2022) haben wir alternative Maße verglichen. Der Vergleich wird in Bezug auf die mathematische Komplexität und die statistische Qualität gezogen. Mit Komplexität meinen wir, welche mathematische Kenntnisse die Schüler*innen benötigen, um diesen Wert zu berechnen. Mit Qualität meinen wir, wie stark dieses Unsicherheitsmaß im Vergleich zu der Standardabweichung abweicht. Wir haben folgende vier alternative Unsicherheitsmaße in unserem Vergleich berücksichtigt:

- *Maximalabstand*: der größte Abstand des Mittelwerts zu allen Werten der Messreihe.
- *Ausschließen von Extremwerten*: wie *Maximalabstand*, aber ohne den größten und kleinsten Wert der Messreihe (ein Extremwertepaar).

- *Mittlere 50%*: wie *Ausschließen von Extremwerten*, aber nun werden solange Extremwertepaare ausgeschlossen, sodass mindestens noch die Hälfte der Messwerte übrig bleiben.
- *Mean Absolute Deviation (MAD)*: oder mittlere absolute Abweichung; dies ist der Mittelwert aller Abstände von Messwert zu Mittelwert, sie wird berechnet durch:

$$u_{\text{MAD}} = \frac{1}{N} \sum_i^N |x_i - \bar{x}|, \quad (1)$$

wobei N die Anzahl der Messungen, x_i die jeweiligen Messwerte und \bar{x} der Mittelwert ist.

Für den Vergleich haben wir eine Monte-Carlo Simulation erstellt (für Details siehe Kok und Priemer, 2022). Dazu wurden Datensätze mit 4 bis 20 Messwerten zufällig aus einem Datenpool gezogen, die vier alternativen Unsicherheitsmaße und die Standardabweichung berechnet und mit der bekannten Standardabweichung der Simulation verglichen. Das Vergleichsmaß ist das mean uncertainty deviation, welches beschreibt, wie viele Standardabweichungen ein alternatives Unsicherheitsmaß von der bekannten Standardabweichung der gesamten Simulation abweicht.

Das Fazit des Vergleichs ist, dass mit zunehmender Komplexität des Unsicherheitsmaßes dessen Qualität zunimmt.

Da die Analyse eines Messergebnisses unabhängig vom gewählten Unsicherheitsmaß erfolgen kann, bietet sich eine Sequenzierung an, welche mit einem Unsicherheitsmaß niedriger Komplexität (und geringer Qualität) beginnt. Somit liegt der Fokus zunächst auf den Konzepten der Messunsicherheiten und nicht auf deren Berechnung. Diese Sequenzierung kann bereits in der 8. Klasse beginnen und im Sinne eines Spiralcurriculums bis zur Oberstufe weitergeführt werden (siehe auch Kok und Priemer, angenommen).

Sequenzierung

Die von uns vorgeschlagene Sequenzierung fängt mit dem *Maximalabstand* an. Der Vorteil dieses Maßes ist die geringe mathematische Komplexität. Nachteil ist jedoch, dass es zu einer großen Überschätzung der Unsicherheit wegen des großen Einflusses von Ausreißern führt.

Das Konzept Ausreißer (auch Teil des Sachstrukturmodells, Hellwig, 2012) lässt sich somit gut thematisieren und ein neues, qualitativ besseres Maß, *Ausschließen von Extremwerten*, könnte eingeführt werden. Dieses weist noch immer eine geringe mathematische Komplexität auf. Zudem hat sich in unserer Simulation gezeigt, dass dieses Maß für Datensätze mit $N=8$ Messwerten häufig den gleichen Wert wie die Standardabweichung selbst erzeugt. Bei größeren Werten von N haben Ausreißer jedoch erneut einen großen Einfluss.

Um den Einfluss der Anzahl der Messwerte zu reduzieren, kann das Unsicherheitsmaß der *Mittleren 50%* eingeführt werden. Hier haben Ausreißer einen geringen Einfluss. Nachteil ist, dass die Hälfte der Messwerte verworfen wird. Dies nährt Zweifel bei Schüler*innen an der Sinnhaftigkeit des Vorgehens.

Das *MAD* bietet für dieses Problem einen Ausweg. Alle Werte werden verwendet und der Einfluss von Ausreißern wird ausgeglichen. Obwohl es mathematisch komplexer als die *Mittleren 50%* ist, liegt es dennoch sehr nah an der Berechnung des Mittelwerts. Des Weiteren

ist es konzeptuell einfach zu verstehen: die mittlere absolute Abweichung aller Messwerte zum Mittelwert. Das *MAD* entspricht jedoch nicht dem wissenschaftlichen Standard. Am Ende der Sequenzierung wird die Standardabweichung thematisiert. Hierzu müssen auch die Konzepte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Normalverteilung von Messwerten thematisiert werden.

Unterschiedliche Schlussfolgerungen bei unterschiedlichen Maßen

Anzumerken ist, dass die unterschiedlichen Unsicherheitsmaße zu unterschiedliche Werten führen. Somit könnten sich bei der Auswertung eines Datensatzes in Abhängigkeit vom gewählten Unsicherheitsmaß unterschiedliche Schlussfolgerungen ergeben.

Abbildung 1 zeigt z. B., dass das Messergebnis mit *Maximalabstand* als Unsicherheitsmaß mit einem Referenzwert verträglich ist. Wird jedoch das *MAD* verwendet, so gibt es keine Verträglichkeit zum Referenzwert, obwohl auch dieses Messergebnis mit dem gleichen Datensatz berechnet worden ist. Das Gleiche kann auch auftreten, wenn zwei Messergebnisse verglichen werden (siehe Abb. 2).

Fazit

Die vorgeschlagene Sequenzierung bietet eine Möglichkeit, das Thema Messunsicherheiten zu behandeln, wobei der Fokus auf den Konzepten und nicht auf der mathematischen Berechnung liegt. Während der Sequenzierung—die bereits in der 8. Klasse begonnen werden kann—können die jeweiligen Konzepte der Messunsicherheiten thematisiert werden, die das Unsicherheitsmaß verbessern.

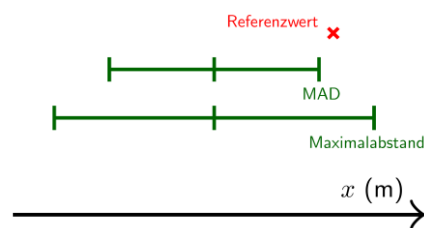


Abb. 1 Das Messergebnis (grüne Balken) ist verträglich mit den Referenzwert (rotes Kreuz), wenn der Maximalabstand gewählt wird; mit den *MAD* ist das nicht der Fall.

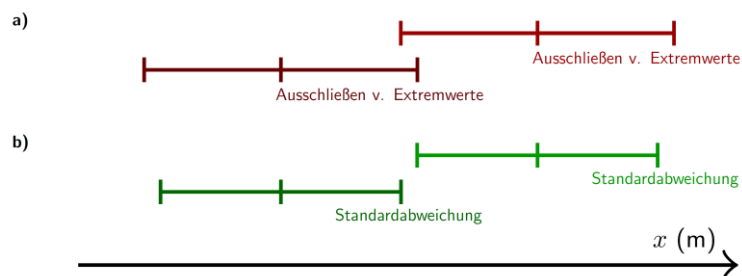


Abb. 2 a) Die zwei Messergebnisse (rot, dunkel rot) überschneiden sich, wenn das Ausschließen von Extremwerten angewendet wird, und sind somit verträglich. b) Die zwei Messergebnisse (grün, dunkel grün) überschneiden sich nicht, wenn die Standardabweichung angewendet wird, und sind somit nicht verträglich.

Literatur

- Buffler, A., Allie, S., & Lubben, F. (2001). The development of first year physics students' ideas about measurement in terms of point and set paradigms. *International Journal of Science Education*, 23(11), 1137–1156. <https://doi.org/10.1080/09500690110039567>
- Hellwig, J. (2012). *Messunsicherheiten verstehen: Entwicklung eines normativen Sachstrukturmodells am Beispiel des Unterrichtsfaches Physik* [Dissertation, Ruhr-Universität].
- Hull, M. M., Jansky, A., & Hopf, M. (2020). Probability-related naïve ideas across physics topics. *Studies in Science Education*, 57(1), 45–83. <https://doi.org/10.1080/03057267.2020.1757244>
- Kok, K. (2022). *Certain about uncertainty—What students need to know about measurement uncertainties to compare data sets*. [Dissertation, Humboldt-Universität]. <https://doi.org/10.18452/24782>
- Kok, K., & Priemer, B. (2022). Comparing Different Uncertainty Measures to Quantify Measurement Uncertainties in High School Science Experiments. *International Journal of Physics and Chemistry Education*, 14(1), 1–9. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.04102>
- Kok, K., & Priemer, B. (angenommen). Messunsicherheiten quantifizieren: Welche Maße gibt es dafür? *MNU Journal*.
- Kok, K., Priemer, B., Musold, W., & Masnick, A. (2019). Students' conclusions from measurement data: The more decimal places, the better? *Physical Review Physics Education Research*, 15(1), 010103. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010103>
- Möhrke, P. (2020). Messunsicherheiten im Physikunterricht—Befragung von Lehrkräften in Baden-Württemberg. In S. Habig (Ed.), *Naturwissenschaftliche Kompetenzen in der Gesellschaft von morgen* (Vol. 46, pp. 876–879). Universität Duisburg-Essen.
- Priemer, B., & Hellwig, J. (2018). Learning About Measurement Uncertainties in Secondary Education: A Model of the Subject Matter. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1), 45–68. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9768-0>
- Séré, M., Journeaux, R., & Larcher, C. (1993). Learning the statistical analysis of measurement errors. *International Journal of Science Education*, 15(4), 427–438. <https://doi.org/10.1080/0950069930150406>
- Zangl, H., & Hoermaier, K. (2017). Educational aspects of uncertainty calculation with software tools. *Measurement*, 101, 257–264. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.11.005>