Posterbeitrag zur Jahrestagung 2023 der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik (GDCP), 11. – 14. Sept. 2023, P049 (Einzelposter: Mi, 13. Sept. 2023, 15:30 – 16:30 Uhr, VMP9 S07)

Wie viel Luft passt in einen vier- oder fünfdimensionalen Hyperwürfel?

Martin Erik Horn

martin.horn@dozent.ism.de (ISM International School of Management, Campus Berlin) & martinerik.horn@googlemail.com (privat)

Motivation: Am besten fachübergreifend

Chemie- & Chemiedidaktik: Ist dies eine chemiedidaktische Fragestellung? Vielleicht – immerhin müssen bei der Beantwortung der Ausgangsfrage Eigenschaften von Luft, also des Gasgemischs aus N_2 und O_2, berücksichtigt werden.
Mathematik- & Mathematikdidaktik: Die Erkundung der Eigenschaften höherdimensionaler Körper (z.B. Tesserakte und andere Hyperwürfel bzw. Pentachora und andere Hypertetraeder) erfordert das Durchdenken typisch geometrischer Fragestellungen.
Physik- & Physikdidaktik: Die vierdimensionale Raumzeit wird leichter zugänglich sein, wenn zuvor rein räumliche Situationen im Vierdimensionalen diskutiert und analysiert werden. **Und zusätzlich meine Lieblingsbemerkung:** Geometrische Algebra (→ Hestenes) macht Vieles einfacher!

Ausgangspunkt: Die Reise ins Labyrinth

You have no power over me! Als Sarah (Oscar-.Preisträgerin Jennifer Connelly, u.a. „A Beautiful Mind") das vier- oder fünfdimensionale Labyrinth des Kobald-Königs Jareth (David Bowie) durchquert, kann sie problemlos atmen, da offenkundig in jede Richtung, in die sie sich bewegt, ein dreidimensionaler normaler Luftdruck herrscht. Ein entsprechender Filmschnipsel kann im Internet bei Youtube angesehen werden. **www.youtube.com/watch?v=k8qs16mAU0s**
Unter der Annahme, dass alle Moleküle der Luft im vier- oder fünfdimensionalen Raum einen durchschnittlichen Abstand aufweisen, der dem der dreidimensionalen Normalbedingungen entspricht, kann die Luftmasse in einem höherdimensionalen Hyperwürfel berechnet werden.

Durchschnittlicher Abstand der Moleküle der Luft: $r = 3{,}75 \cdot 10^{-9}$ m = 3,75 nm

Abb. 20: Schematische Darstellung der Moleküle eindimensionaler Luft.

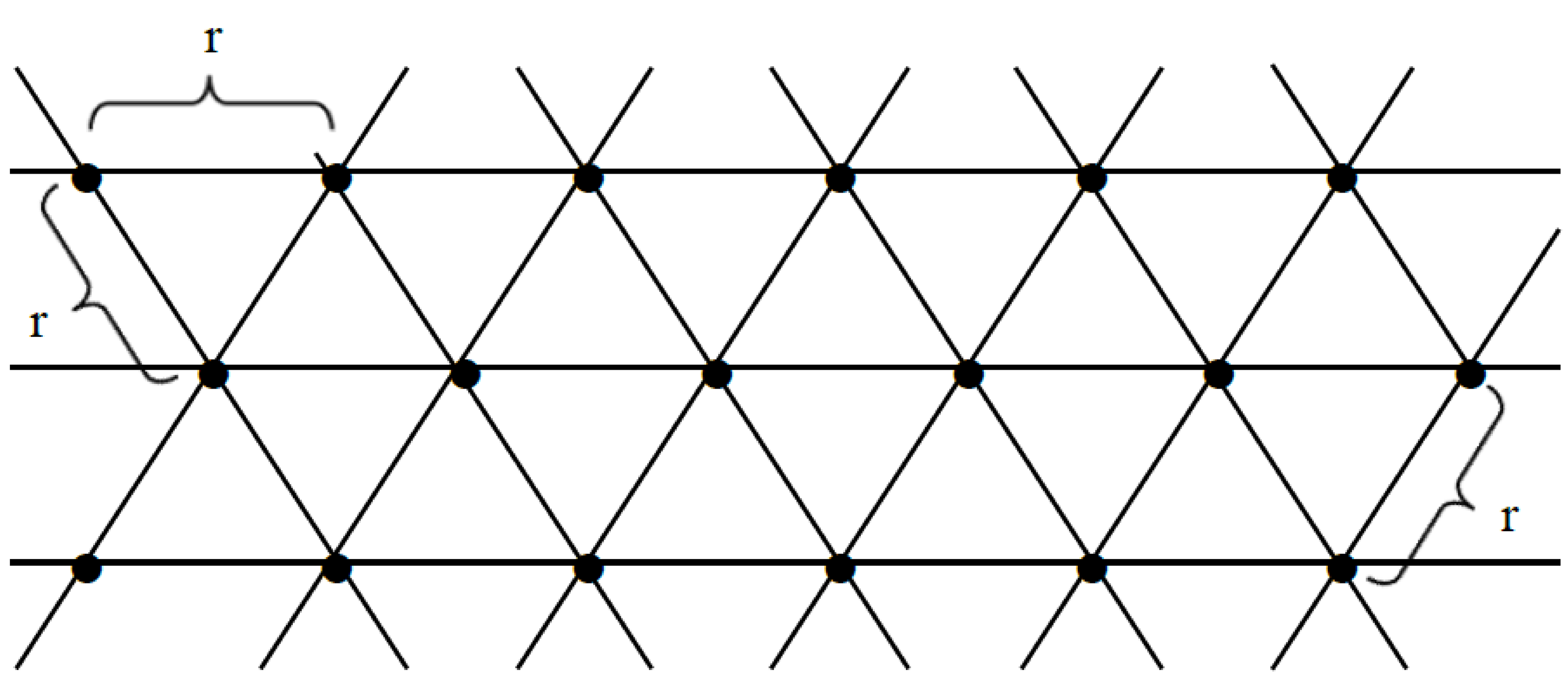

Abb. 21: Schematische Darstellung der Moleküle zweidimensionaler Luft.

Quelle: Martin Erik Horn: **Pythagoras und die vierte Dimension.** Ein Überblick über die geometrische Verallgemeinerung der Satzgruppen von Pythagoras und de Gua de Malves. BoD – Books on Demand, Norderstedt 2022, S. 82, 88. ISBN: 978-3-7562-0388-8

Verallgemeinerung für höherdimensionale Situationen: Im Durchschnitt ist alles ist gleich lang.

1d: gleichlange Strecken → 2d: gleichseitige Dreiecke → 3d: regelmäßige Tetraeder (4-Flächner) → 4d: regelmäßige Pentachora (5-Volumner) → 5d: regelmäßige Hexa-Hyperchora (6-Hypervolumner)

Gesucht wird nun jeweils die Höhe des entsprechenden regelmäßigen, also immer gleichseitigen Körpers.
Mit Hilfe dieser Höhe kann nun das Hypervolumen bestimmt werden, das jedem Molekül zur Verfügung steht.

→ Hier hilft es sehr, zur Berechnung der gesuchten geometrischen Größen die **Geometrische Algebra** in Form einer verallgemeinerten **Pauli-Algebra** zu verwenden.

Figur / Körper	Höhe	wird begrenzt durch
Strecke	$h_1 = \frac{1}{1}\sqrt{1}\,r$	zwei Punkte
Dreieck	$h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$	drei gleichlange Strecken
Tetraeder	$h_3 = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,r$	vier gleichgroße Dreiecke
Pentachoron	$h_4 = \frac{1}{4}\sqrt{10}\,r$	fünf gleichgroße Tetraeder
Hexa-Hyperchoron	$h_5 = \frac{1}{5}\sqrt{15}\,r$	sechs gleichgroße Pentachora

Tab. 4: Höhen gleichseitiger Figuren bzw. Körper.

Wird ein dreidimensionales würfelförmiges Labyrinth der Seitenlängen r = 20 m angenommen, führt dies auf ein Volumen von **V_{lab3} = (20 m)³ = 8000 m³**
und eine Masse der darin enthaltenen Luft von

m_{luft3} = 10240 kg = 10,24 t

Nein, ein vierdimensionales Volumen von $V_{lab4} = (20\text{ m})^4 = 160\,000\text{ m}^4$ ist nicht 20 mal so groß wie von $V_{lab3} = (20\text{ m})^3 = 8000\text{ m}^3$!

Es sieht auf den ersten Blick zwar so aus, als ob das vierdimensionale Volumen 20 mal so groß ist, so dass **$20 \cdot 10\,240$ kg = 204 800 kg = 204,8 t** Luft in dieses Labyrinth passen sollten. **Doch das täuscht!** Das Labyrinth ist vierdimensional, uns es passt deutlich mehr Luft hinein.

Schließlich folgt auf eine erste dreidimensionale Luftschicht der Masse von 10,24 t im sehr kleinen Abstand von h_4 bereits die nächste dreidimensionale Luftschicht der Masse von 10,24 t. Und dann nach $2\,h_4$ folgt wieder eine Luftschicht von 10,24 t, usw…

Dies führt dazu, dass in einen vierdimensionalen Hyperwürfel mit einer Kantenlänge von 20 m ungefähr **$m_{luft4} = 6{,}91 \cdot 10^{10}$ t = 69,1 Milliarden Tonnen** Luft enthalten sind. Auf unserer dreidimensionalen Erde würde diese Luftmasse einen dreidimensionalen Würfel der Kantenlänge von 37,8 km füllen.

Und wie viel Luft passt in ein fünfdimensionales Labyrinth des Hypervolumens **$V_{lab5} = (20\text{ m})^5 = 3\,200\,000\text{ m}^4$** ?

Die Antwort: **$m_{luft5} = 4{,}77 \cdot 10^{20}$ t = 477 Trillionen Tonnen Luft.** Das ist weit mehr Luft, als die Erdatmosphäre besitzt, nämlich eine Luftmasse, die unter Normalbedinungen in einem dreidimensionalen Würfel mit einer Kantenlänge von **72 000 km** enthalten wäre.

Zum Schluss meine didaktische Lieblingsschlussfolgerung: Lernen Sie die Geometrische Algebra! Und setzen Sie sie im Hochschul- und Schulunterricht (→ www.youtube.com/@pre-universitygeometricalg5862) ein. Und hallo: Lesen Sie mein Buch (mit der Bitte um Rückmeldung bei Fehlern).