GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN IN PUBLICA COMMODA SEIT 1737

GDCP Jahrestagung 2024, Bochum, P070

Eye-Tracking zur Analyse der Lern- und Problemlöseprozesse komplexer Zahlen

Jakob Priebe[a], Larissa Hahn, Josefine Neuhaus, Pascal Klein

Georg-August-Universität Göttingen [a] Kontakt: jakob.priebe@stud.uni-goettingen.de

Motivation und Forschungsstand

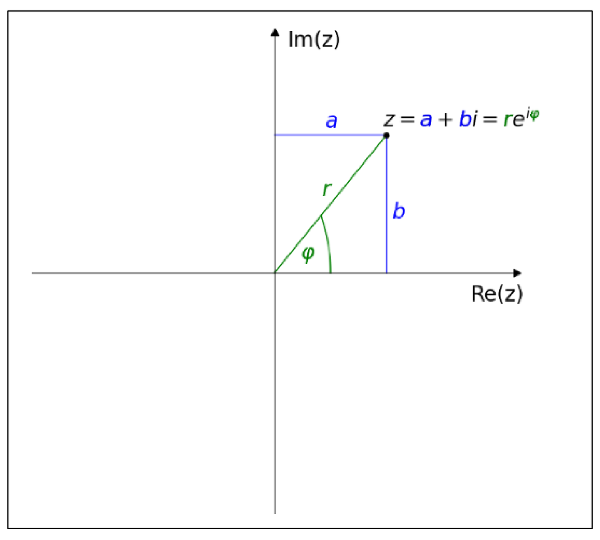


Abb. 1: Darstellung einer komplexer Zahl z in kartesischer und polarer Form

Komplexe Zahlen ℂ

- Erweiterung der reellen Zahlen ℝ, definiert durch $z = a + ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. Darstellbar in **Gaußscher Zahlenebene** (Abb. 1)
- zentraler Bestandteil aller mathematischen. physikalischen und ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge (und spezifischer Lehramtstudiengänge) und Grundlage für zahlreiche weiterführende Themengebiete

Forschungsstand:

- Bislang keine Eye-Tracking-Studie zu komplexen Zahlen. (**Motivation**: Hochgradig visueller Charakter typischer Aufgabenformen, rechnerischer Vorgang meist routiniert-algorithmischer Prozesse, weniger aber durch sinnhafte Veranschaulichung)
- Bisherige Erkenntnisse zu Lernschwierigkeiten bei komplexen Zahlen[1,2]
- 1. Quadrierung
  2. Division
  3. Wechsel von kartesischer und polarer Form

Methodische Perspektive:

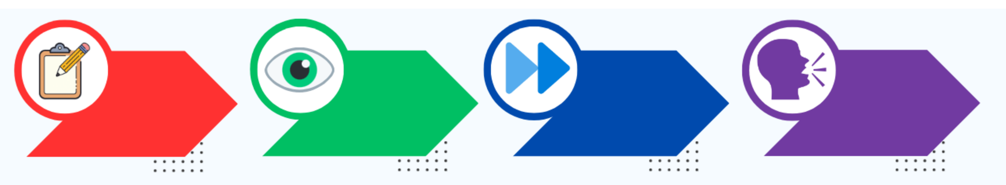
- Für tiefgreifende Interpretation erhobener Blickdaten werden zusätzliche Informationen benötigt[3]: Verbaldaten (beispielsweise Restrospective Thinking Aloud (RTA), bei dem Gedanken vergangener Handlungen wiedergegeben warden) ergänzen die visuellen Daten des Eye-Trackings, um mentale Prozesse aufzuklären

Forschungsdesign und Datenerhebung

Vorüberlegungen:

- **V1: Gibt es visuelle Gemeinsamkeiten oder Unterschiede bei Probanden, die Arichtig oder falsch gelöst haben? Ermöglichen die RTA-Daten einen Erklärungsansatz?**
- **V2: Gibt es visuelle Auffälligkeiten bei der Bearbeitung von Aufgaben komplexer Zahlen? Bevorzugen Probanden bestimmte Bereiche, werden andere Bereiche vernachlässigt?**

Ablauf: Probanden werden 14 Items zu Aufgaben der komplexen Zahlen vorgelegt (Abb. 2), bei dessen Bearbeitungen die Augenbewegungen aufgezeichnet werden. Nach dem Klicken der Leertaste soll der Lösungsweg erklärt werden. Die Stimuli sind so konzipiert, dass sie visuell (etwa durch Kovariationsbetrachtung) direkt lösbar sind (Abb. 2).



Kategorisierung:

Für eine einheitlichere Analyse wurden die Aufgaben in verschiedene Gruppen aufgeteilt:

- 4 Items: Variation von Real- und Imaginärteil (**A**)
- 2 Items: Variation des Betrags (**B**)
- 4 Items: Variation der Phase (**C**)
- 4 Items: Arithmetik komplexer Zahlen (**D**)
- 2 Items: Komplexe Konjugation und Negation (**E**)

Stichprobe:

- **Durchführung**: Juni 2024 mit 33 Physikstudierenden (davon 8 weiblich) und einem Doktoranden der Chemie
- **Studiengang (Anzahl und Fachsemester)**: B.Sc: 28 (FS 3.47 ± 2.28); M.Sc: 3; Nebenfach: 2; Chemie-Doktorand: 1
- **Vorwissen:** Mindestens eine abgeschlossene Lehrveranstaltung, in der komplexe Zahlen thematisiert wurden

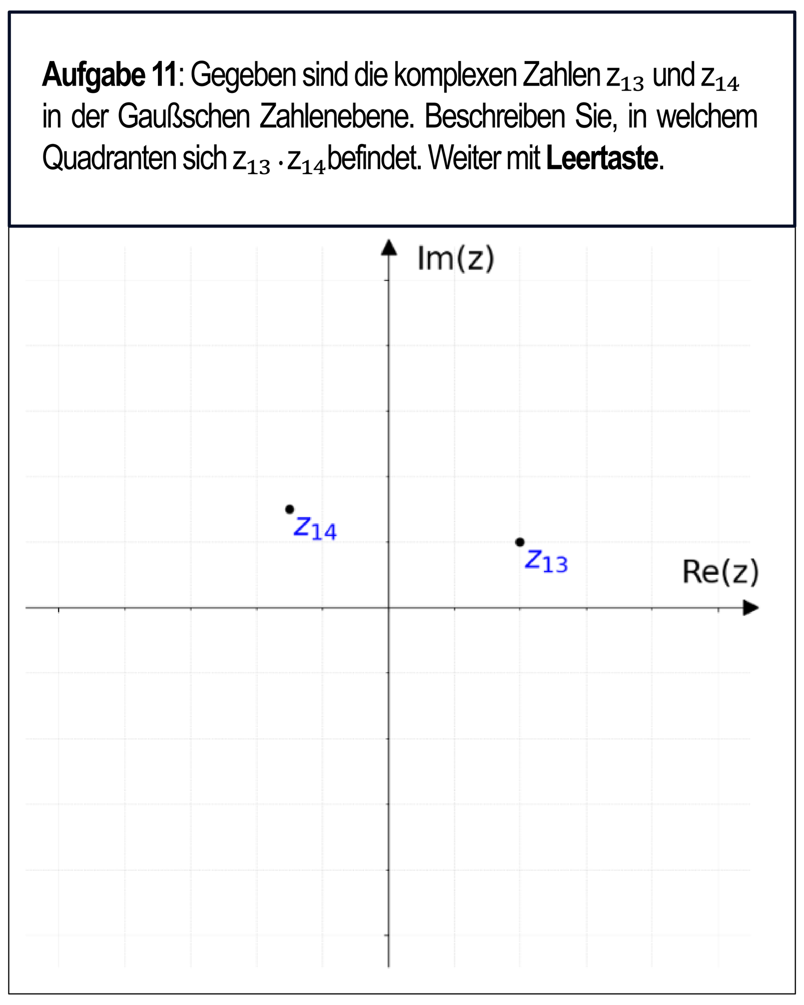


Abb. 2: Beispielitem der Gruppenkategorie D

Ausgewählte Ergebnisse

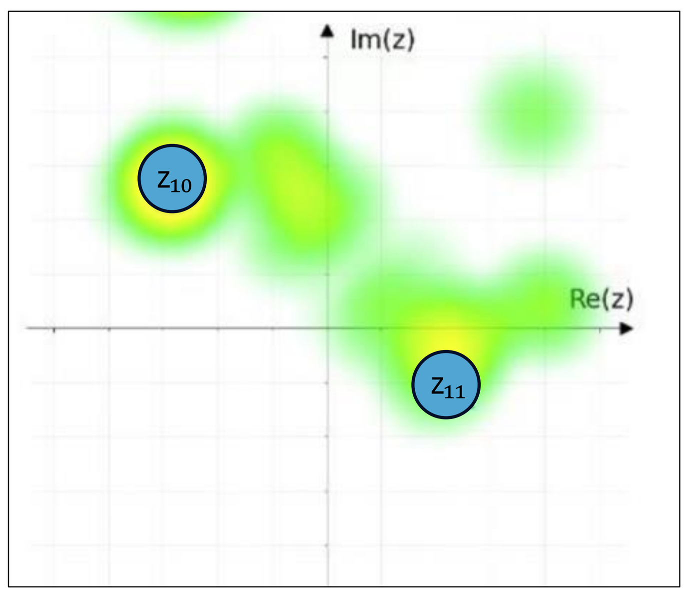


Abb. 3: Heatmap der Fixationen bei der Multiplikation komplexer Zahlen (Gruppenkategorie D)

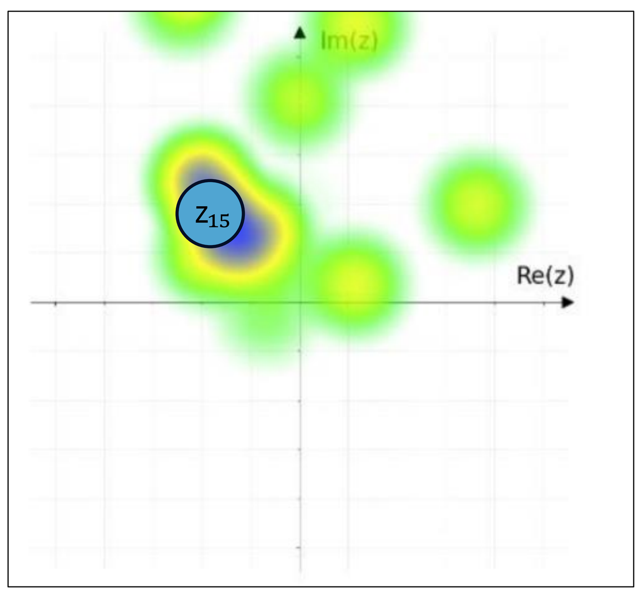


Abb. 4: Heatmap der Fixationen bei der Quadrierung einer komplexen Zahl (Gruppenkategorie D)

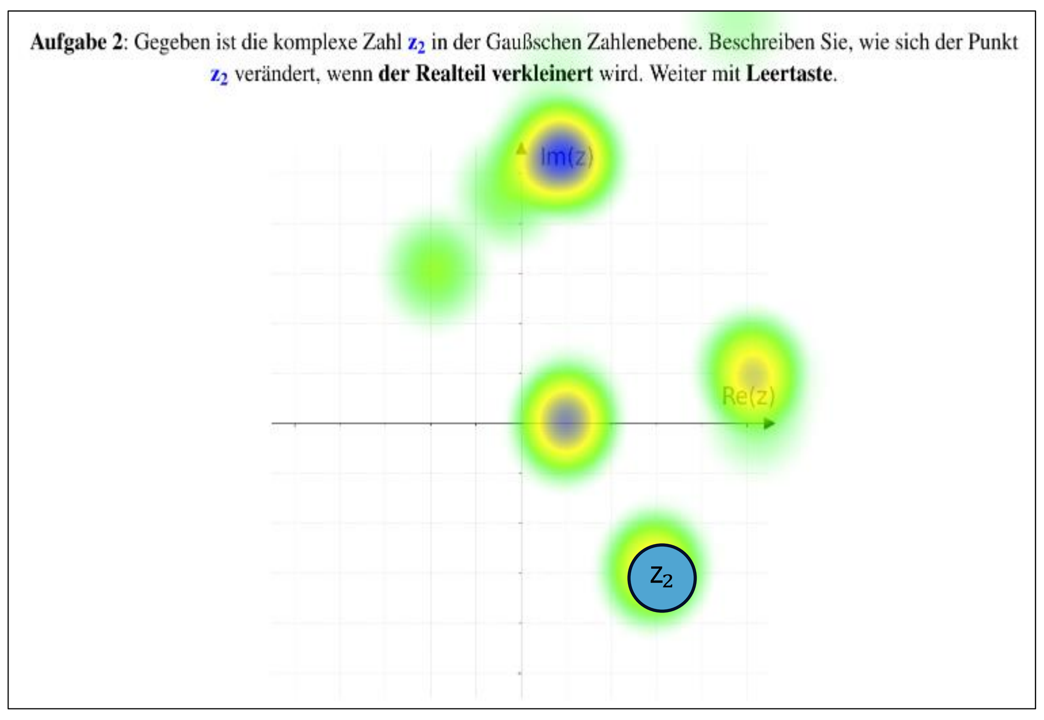


Abb. 5: : Heatmap der Fixationen einer Kovariationsbetrachtung (Gruppenkategorie A)

- 12 von den 19 Fehlern, die 14 Probanden in **D** (76% aller gesamten Fehler) machten, lassen sich auf Kopfrechnen zurückführen
- 8 der 14 betroffenen Probanden erzählten, dass sie präferiert probiert haben, multiplikative Aufgaben (also auch Quadrierung) durch Ausklammern zu lösen (H1), anstatt sie visuell zu bearbeiten
- 3 der insgesamt 11 Fehler der Quadrierung einer komplexen Zahl kamen zustande, indem Probanden versucht haben, kartesische Zahlenwerte an den Achsen abzulesen, obwohl keine vorgegeben waren, und diese im Kopf in die Exponentialform umzuwandeln und abschließend im Kopf zu multiplizieren. (H2)
- Quadrant I wird bei arithmetischen (**A**: 54,9%; **D**: 62,9%), aber auch bei nicht-arithmetischen Aufgaben bevorzugt betrachtet, auch wenn keine komplexe Zahl in diesem Quadranten dargestellt wird oder sich das Ergebnis nicht in diesem Quadranten befindet (Abb. 3 bis 5)
- Zu 81.7% schauen die Probanden zuerst in den ersten Quadranten, unabhängig davon, ob sich dort eine komplexe Zahl befindet oder nicht. Befindet sich das Ergebnis in einem der unteren Quadranten (Abb. 4 und 5), so werden die unteren Quadranten dennoch gemieden (Visuelle Aufenthaltsdauer der unteren Quadranten: 21.4%).
- Bei (kommutativen) Aufgaben, in denen zwei komplexe Zahlen involviert sind (**D**, Abb. 3), wird immer die Zahl visuell bevorzugt, die sich in einem oberen Quadranten befindet (Fokus Zahl des oberen Quadranten: 71.9%).

Induktiv gebildete Hypothesen

- **H1:** Physikstudierende, die Aufgaben der Multiplikation komplexer Zahlen durch Ausklammern lösen, machen signifikant mehr Fehler als die, die es bildlich lösen.
- **H2:** Physikstudierende, die zur Lösung der Aufgabe die Darstellungsformen im Kopf umrechnen, machen signifikant mehr Fehler als die, die es bildlich lösen.
- **H3:** Physikstudierende präferieren die oberen Quadranten gegen den unteren bezüglich der visuellen Aufenthaltsdauer
- **H4:** Physikstudierende präferieren den ersten Quadranten gegen dem zweiten bezüglich der visuellen Aufenthaltsdauer

Fazit und Ausblick

- Arithmetische Aufgaben der komplexen Zahlen werden häufiger korrekt gelöst, wenn visuell gearbeitet und weniger gerechnet wird
- Bevorzugung bestimmter Quadranten in der Reihenfolge Q1 → Q2 → Q4 → Q3
- Affinitätsförderung unterer Quadranten durch angepasste Aufgabenstellungen
- Förderung des graphischen Verständnisses komplexer Zahlen durch spezifische visuelle Repräsentationen (MERs)
- Verknüpfung mit etablierten Salienzmodellen, etwa Top-down und Bottom-up-Theorie[4]

Literatur

[1] Smith, E. M. (2017). Students' Understanding of Complex Numbers in Middle-Division Physics* (Dissertation, Oregon State University), S. 53, 58, 67.
[2] Mutambara, L. H. N., & Tsakeni, M. (2022). Cognitive obstacles in the learning of complex number concepts: A case study of in-service undergraduate physics student-teachers in Zimbabwe. *European Journal of Science and Mathematics Education, 10*(4), 422-436. (https://doi.org/10.30935/scimath/12169)
[3] Hofmann, J., Hahn, L., Jeličić, K., Sušac, A., & Klein, P. (2023). Triangulation von Verbal- und Blickdaten: Eine Eye-Tracking-Studie. *Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 1*(1). Abgerufen von https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1397
[4] Katsuki, F., & Constantinidis, C. (2013). Bottom-Up and Top-Down Attention. *The Neuroscientist, 20*(5), 509-521. https://doi.org/10.1177/1073858413514136