

Jakob Priebe¹
Larissa Hahn¹
Pascal Klein¹

¹Georg-August-Universität Göttingen

Eye-Tracking zur Analyse der Lern- und Problemlöseprozesse komplexer Zahlen

Das Themengebiet der komplexen Zahlen ist zentral in natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. Empirische Studien zeigen jedoch, dass Studierende – auch in höheren Semestern – oft grundlegende Schwierigkeiten mit elementaren Operationen, insbesondere der Multiplikation (Smith, 2015), haben. Die Gaußsche Zahlenebene ermöglicht eine visuelle Darstellungsmöglichkeit komplexer Zahlen und ihrer komplex-arithmetische Operationen. Bisher lag der Schwerpunkt auf deklarativen Aspekten, wie der Interpretation arithmetischer Ergebnisse im Bereich komplexer Zahlen (Smith, 2015; Hamufari et al., 2015), während visuell-prozedurale Bearbeitungsprozesse vernachlässigt wurden. Die vorgestellte Studie schließt mittels Eye-Tracking an diesen Ansatz an und präsentiert erste Analyseergebnisse von Blickdaten mit $N = 34$ Physikstudierenden bei grundlegenden Aufgaben komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Theoretischer Hintergrund

Multiple externe Repräsentationen (meR) sind essenziell für das Verständnis und die Kommunikation naturwissenschaftlicher Konzepte, da sie kognitive Werkzeuge darstellen, die das Verstehen und Bearbeiten abstrakter Inhalte unterstützen (Krey & Schwanewedel, 2018; Opfermann et al., 2017). Forschungsergebnisse zeigen, dass der Einsatz von meR insbesondere in der Physik das Verständnis und die Problemlösungsfähigkeiten fördert (Berthold & Renkl, 2009; Susac et al., 2017). Gleichzeitig können meR jedoch auch kognitive Belastungen hervorrufen, die den Lernerfolg beeinträchtigen (Ainsworth, 2006; De Jong et al., 1998; Nguyen & Rebello, 2011; Susac et al., 2023). Um Aufgaben in der Gaußschen Zahlenebene zu bewältigen, müssen Lernende also die Informationskodierung und Beziehungen zwischen Repräsentationen verstehen. Dafür benötigen sie Repräsentationskompetenzen, definiert als "*knowledge and skills that enable them to use visual representations to reason and solve tasks*" (Rau, 2017, S. 719). Der Erwerb dieser Repräsentationskompetenzen ist nach Seufert und Brünken (2006) ein Kohärenzbildungsprozess. Er umfasst lokale Prozesse, die spezifische Darstellungsformen betreffen, und globale Prozesse zur Verknüpfung verschiedener Darstellungen, etwa in der Gaußschen Zahlenebene oder in kartesischer und exponentieller Form. In der vorliegenden Untersuchung wird Eye-Tracking als Methode eingesetzt, um die Bedeutung der visuellen Informationsverarbeitung bei Aufgaben zu komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene zu analysieren. Diese Methode hat sich als hilfreich bei der Analyse von Prozessen mit mentalen Rechenoperationen erwiesen. Klein et al. (2021) verwendeten zum Beispiel Eye-Tracking, um durch die Analyse der Blickbewegungsrichtung Problemlösestrategien und Verhaltensweisen bei der Beurteilung eines Vektorfelddiagramms zu identifizieren und zu charakterisieren.

Forschungsziele und -fragen

Die vorliegende Studie beschäftigt sich mit den Schwierigkeiten von Studierenden im Umgang mit der Multiplikation komplexer Zahlen und erweitert diesen Ansatz durch eine umfassende Analyse der Blickdaten bei multiplikativen Aufgaben in der Gaußschen Zahlenebene. Daraus ergibt sich die folgende Forschungsfrage:

Wie unterscheiden sich die Vorgehensweisen von Studierenden mit korrekten und inkorrekten Lösungen zur Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene zwischen einer geometrischen und einer rechenbasierten Vorgehensweise?

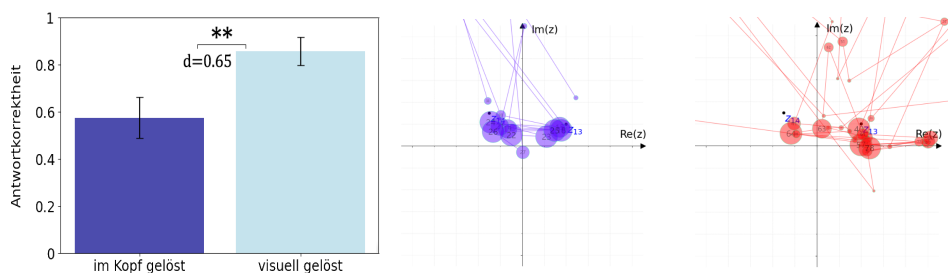
Methodik

Die Stichprobe besteht aus 34 Proband*innen davon 33 Physikstudierende (8 weiblich), 28 immatrikuliert im Bachelor- (Fachsemester $3,47 \pm 2,28$), 3 im Master-Studiengang, 2 im Physik-Nebenfach und einem Doktoranden der Chemie. Alle Proband*innen hatten mindestens eine abgeschlossene Lehrveranstaltung besucht, in der das Thema komplexe Zahlen behandelt wurde. Den Proband*innen wurden 14 verschiedene Aufgaben zur Bearbeitung mit der Gaußschen Zahlenebene, darunter auch zwei Items, die die Multiplikation komplexer Zahlen umfassen, vorgelegt. Das Blickverhalten wurde mit einem stationären Eye-Tracker (Tobii Pro Fusion, 120 Hz) erfasst und der Lösungsweg anschließend verbal dokumentiert. Die Auswertung der Blickdaten umfasst eine qualitative Analyse der Blickverläufe (Gazeplot). Neben den Blickdaten wurden ergänzend auch die Verbaldaten des Lösungsprozesses aufgezeichnet und anschließend mit den Blickdaten nach qualitativer Inhaltsanalyse mit induktiver Kategorienbildung nach Mayring (2010) trianguliert, um potenzielle Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Multiplikation komplexer Zahlen zu identifizieren. Dazu zählt die Vorgehensweise von Probanden*innen, welche die Aufgaben bevorzugt durch visuell-geometrische Interpretation (z.B. „*der Winkel der neuen Zahl muss ja so groß sein wie die Summe der alten zwei. Wenn ich das so anschau, dann müsste der neue Winkel im zweiten Quadranten liegen.*“) oder die Verwendung von Kopfrechenprozessen (z.B. „*Wenn ich jetzt ungefähr $(2+i)$ mit $(-1+i)$ multipliziere, dann komme ich auf $(-3+i)$ und das ist dann im zweiten Quadranten.*“). War eine klare Zuordnung zu einer der beiden Kategorien nicht möglich, wurden diese Studierenden von der weiteren Analyse der Forschungsfrage ausgeschlossen. Von ursprünglich 68 Antworten für die beiden multiplikativen Aufgaben der 34 Proband*innen wurden insgesamt $N = 47$ Antworten ausgewertet.

Ausgewählte Ergebnisse

Ein unabhängiger t-Test ergab einen signifikanten Unterschied in den Mittelwerten der Aufgabenkorrektheiten zwischen den Gruppen der Studierenden, die Kopfrechenprozesse nutzten, und denen, die geometrische Interpretationen verwendeten ($p = 0.0103$) und eine mittlere Effektstärke von $d = 0.65$ (Cohen, 1988). Während im Durchschnitt 95.1% der Aufgaben korrekt beantwortet wurden, lag der Anteil für die richtige Beantwortung der multiplikativen Aufgaben lediglich bei 77.9%. Während 54.4% der Proband*innen die Aufgabe nach geometrischer Interpretation lösten, griffen 45.5% der Proband*innen auf die Methode der Kopfrechenprozesse zurück (siehe Abb. 1 links). 59.4% der Proband*innen, welche die Aufgaben der Multiplikation rechenbasiert bearbeiteten, berechneten diese richtig.

Die Wahrscheinlichkeit von 91.6 %, mit der Studierende, die auf Kopfrechenprozesse zurückgriffen, eine beliebige Aufgabe im Durchschnitt richtig beantworteten, ist damit im Verhältnis deutlich höher. Im direkten Vergleich haben Proband*innen, welche die Aufgaben nach geometrischer Interpretation gelöst haben, eine um 26.3% erhöhte Chance, auf das richtige Ergebnis zu kommen. Die meisten Fehler der rechenbasierten Vorgehensweise traten auf, weil Studierende versuchten, kartesische Zahlenwerte an den Achsen abzulesen und mit diesen weiterzurechnen, sei es durch Ausmultiplikation oder durch Umwandlung in die exponentielle Form. Dies kann durch Gazeplots zu multiplikativen Aufgaben veranschaulicht werden: Proband*innen, welche die Aufgaben nach geometrischer Interpretation lösten, schauten weniger auf die Achsen und fokussierten sich mehr auf die Bereiche, in denen das Ergebnis nach arithmetischer Durchführung liegen (Abb. 1 Mitte). Sie schauten bevorzugt in die Bereiche um den Ursprung, in welchen üblicherweise die Winkel komplexer Zahlen in exponentieller Form angegeben werden. Proband*innen, welche die Aufgaben stattdessen im Kopf berechneten, schauten verhältnismäßig öfter auf die Achsen und weniger auf die Bereiche, in denen sich das Ergebnis befindet (siehe Beispielproband Abb. 1 rechts).



*Antwortkorrektheit (1 SEM; * signifikant bei $p < 0.05$, Effektstärke: Cohens d , links); Gazeplots während der Bearbeitung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen mittels geometrischer Interpretation (Mitte) und Kopfrechnung (rechts).*

Diskussion und Ausblick

Die erhöhte Fehlerquote bei multiplikativen Aufgaben zu komplexen Zahlen bestätigt frühere Ergebnisse (Smith, 2015; Hamufari et al., 2015). Dieses Ergebnis zeigt doch, dass die Lösung komplexer Multiplikation in geometrischer Form ein zielführender Ansatz ist. Das Wiederrum motiviert die Verwendung der Gaußschen Zahlenbene bei der Instruktion komplexer Zahlen und bietet damit Unterstützung für Ansätze zum multi-repräsentationalen Lernen komplexer Zahlen. Studierende, welche Aufgaben durch geometrische Interpretation lösen, könnten aufgrund der geringeren Fehlerquote ein vertieftes Verständnis der Veranschaulichung komplexer Arithmetik haben. Dafür wird der Fokus in einer weiteren Datenauswertung auf den Vergleich mit demographischen Angaben, etwa vorher besuchten Lehrveranstaltung (mit curricularen Modulinhalt komplexer Zahlen), gelegt, um zu sehen, ob Studierende mit mehr Vorwissen über komplexe Zahlen bevorzugt auf geometrische Strategien zurückgreifen. Ebenfalls soll eine Analyse verschiedener Metriken, wie Sakkadenrichtungen und Fixationsdauern in unterschiedlichen Bereichen, unterteilt nach Studierenden mit geometrischen bzw. kopfrechnerischen Lösungsansätzen, weitere Erkenntnisse ermöglichen.

Literatur

- Ainsworth, S. E. (2006). : A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198. doi:<https://doi.org/10.1016/j.lan.2006.03.001>
- Berthold, K., & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 70–87.
- Hahn, L., & Klein, P. (2022). Eye tracking in physics education research: A systematic literature review. *Physical Review Physics Education Research*, 18(1). doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102>
- Klein, P., & Hahn, L. (2021). Coordinating vector field equations and diagrams with a serious game in introductory physics. *European Journal of Physics*, 42(4)(045801). doi:<https://doi.org/10.1088/1361-6404/abef5c>
- Krey, O. &. (2018). *Lernen mit externen Repräsentationen* (Bde. , Theorien in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung). (I. P. D. Krüger, Hrsg.)
- Mutambara, L., Natsai, H., & Tsakeni, M. (2022). Cognitive Obstacles in the Learning of Complex Number Concepts: A Case Study of In-Service Undergraduate Physics Student-Teachers in Zimbabwe. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.
- Opfermann, M., S. A., & Fischer, H. E. (2017). Multiple representations in physics and science. Why should we use them? In D. Treagust, R. Duit, & H. Fischer (Hrsg.). Springer. Von https://doi.org/10.1007/978-3-319-58914-5_1 abgerufen
- Rau, M. (2017). Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educational Psychology Review*, 29(4), 717–761. doi:<https://doi.org/10.1007/s11259-017-9500-0>
- Seufert, T., & Brünken, R. (2006).). Cognitive load and the format of instructional aids for coherence formation. *Applied Cognitive Psychology*, 321–331. doi:<https://doi.org/10.1002/acp.1248>
- Smith, E., & Zwolak, J. (2015). Student difficulties with complex numbers. 311-314.
- Susac, A., Bubic, A., Martinjak, P., Planinic, M., & Palmovic, M. (2017). Graphical representations of data improve student understanding of measurement and uncertainty: An eye-tracking study. *Physical Review Physics Education Research*, 13(2), 020125. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020125>