

Vom Graphen zur Gleichung oder Tabelle – Darstellungswechsel indirekt proportionaler Funktionen in der Thermodynamik

Einleitung

Der Graph einer Funktion spielt in der Physik eine zentrale Rolle, da er veranschaulicht, wie sich Veränderungen einer Variablen auf eine andere auswirken. Besonders relevant sind hierbei indirekt proportionale Funktionen, die in zahlreichen Bereichen der Physik eine fundamentale Bedeutung besitzen. Ein klassisches Beispiel findet sich in der Thermodynamik bei isothermen Zustandsänderungen. Die Interpretation solcher Funktionsgraphen stellt jedoch eine wiederkehrende Herausforderung dar (Larkin & Simon, 1987). Insbesondere zeigt sich, dass Lernende Schwierigkeiten haben, indirekt proportionale Funktionen von anderen Potenzfunktionen im thermodynamischen Kontext zu unterscheiden, d.h. isotherme von adiabatischen Zustandsänderungen zu differenzieren (Adila et al., 2018; Saepuzaman et al., 2019; Fehlinger et al., 2025).

Theorie und Forschungsfrage

Bei einer reversiblen, isothermen Zustandsänderung bleibt die Temperatur konstant, während Druck und Volumen in einem umgekehrt proportionalen Verhältnis stehen. Im p - V -Diagramm zeigt sich dieser Zusammenhang als Hyperbel. Um mit solchen Funktionsgraphen sicher umgehen zu können, müssen Lernende nicht nur deren charakteristische Merkmale erkennen, sondern auch zwischen verschiedenen Darstellungsformen wie Graph, Gleichung oder Wertetabelle wechseln können (Geyer & Pospiech, 2015).

Unter einem Darstellungswechsel wird der Übergang zwischen Graphen, Tabellen, algebraischen Ausdrücken und situativen Beschreibungen verstanden (Geyer & Pospiech, 2015). Diese Darstellungen unterscheiden sich jeweils in ihrem Abstraktionsgrad. In diesem Beitrag dient der Funktionsgraph im Diagramm (vgl. Abb. 1) jeweils als Ausgangsdarstellung. Er weist den höchsten Abstraktionsgrad auf. Von dort aus wird der Wechsel entweder zur Wertetabelle als Zieldarstellung mit geringem Abstraktionsgrad oder zur Gleichung als Zieldarstellung mit ebenfalls hohem Abstraktionsgrad betrachtet.

Ein solcher Wechsel lässt sich auf zwei Ebenen beschreiben. Auf der technischen Ebene erfolgt die Umsetzung schrittweise anhand vorgegebener Eigenschaften. Auf der strukturellen Ebene hingegen steht die inhaltliche Äquivalenz im Vordergrund, sodass die Zieldarstellung im jeweiligen Kontext stimmig bleibt. Dabei werden verschiedene Schritte durchlaufen: u.a. werden mögliche Äquivalenzen zwischen Ausgangs- und Zieldarstellung kontrolliert.

Mittels Eye-Tracking lassen sich diese Darstellungswechsel detailliert nachvollziehen. Die Analyse der Sakkaden, also der Blicksprünge zwischen Fixationen, gibt Aufschluss darüber, wie Lernende Informationen aufnehmen und verarbeiten. Besonders die Richtungsverteilungen der Sakkaden liefern Hinweise auf unterschiedliche Strategien des Lesens der Darstellung(en). Vor diesem Hintergrund stellt sich die zentrale Frage dieses Beitrags:

Wie unterscheidet sich die Leseart beim Übergang vom Graphen zur Gleichung gegenüber dem Wechsel vom Graphen zur Wertetabelle?

Stichprobe und Durchführung

Die Stichprobe umfasste 79 Lernende (36 weiblich; 1 divers) der 10. Jahrgangsstufe mit einem Durchschnittsalter von 15,8 Jahren ($SD = 0,56$). Die Erhebung erfolgte jeweils in Einzelsitzungen im Rahmen einer Laborstudie. Zu Beginn erhielten die Teilnehmenden ein Wiederholungsblatt zu den Zusammenhängen zwischen Druck und Volumen, das sie selbstständig innerhalb von maximal zehn Minuten bearbeiten sollten. Teilnehmende, die die Aufgaben vor Ablauf der Bearbeitungszeit abgeschlossen hatten, konnten dies anzeigen und anschließend unmittelbar mit dem nächsten Erhebungsschritt fortfahren.

Anschließend wurde der Funktionsgraphentest durchgeführt, bei dem ein Eye-Tracker das Blickverhalten erfasste. Die Lernenden bearbeiteten die Aufgaben am Bildschirm, während die Versuchsdurchführung von der gegenüberstehenden Versuchsleitung live beobachtet und durch Notizen dokumentiert wurde. Diese Beobachtungen dienten in Kombination mit einem strukturierten Interviewleitfaden als Grundlage für ein anschließendes Interview. Dabei wurden ausgewählte Fragen passend zu den individuellen Bearbeitungen gestellt.

Eine schematische Darstellung des Ablaufs ist in Abbildung 1 dargestellt. Für die nachfolgenden Analysen wird ausschließlich der Funktionsgraphentest berücksichtigt, der im Folgenden näher erläutert wird.

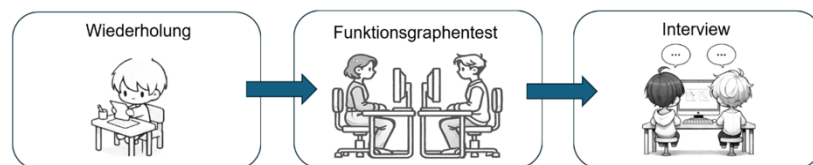


Abb. 1 Schematischer Ablauf der Versuchsdurchführung

Funktionsgraphentest und Auswertung

Der Test umfasste 29 Items unterschiedlicher Kategorien. Für die vorliegende Auswertung wurden die Kategorien *Gleichung* (3 Items, $\alpha = 0,71$) und *Tabelle* (3 Items, $\alpha = 0,82$) berücksichtigt. Aus beiden Kategorien wurde jeweils ein repräsentatives Item ausgewählt (vgl. Abb. 3). Dabei war auf der linken Seite jeweils ein Diagramm dargestellt (analog zu Abb. 1), während auf der rechten Seite vier Antwortmöglichkeiten präsentiert wurden. Im Fall der Gleichungsaufgabe handelte es sich um vier algebraische Ausdrücke, im Fall der Tabellenaufgabe um vier Wertetabellen, von denen jeweils nur eine korrekt war.

Zur Auswertung wurden die Beantwortungshäufigkeiten dichotom codiert (1 = richtig beantwortet, 0 = falsch beantwortet). Zusätzlich wurde das Blickverhalten der Teilnehmenden analysiert. Hierzu wurden *Areas of Interest* (AOIs) definiert: um das Diagramm (grün in Abb. 3), um die falschen Antwortmöglichkeiten (rot) sowie um die richtige Antwortmöglichkeit (gelb). Die Sakkadenrichtungen zwischen diesen AOIs wurden mithilfe einer Kerndichteschätzung kontinuierlich in einem Polardiagramm dargestellt, um Tendenzen im Blickverlauf sichtbar zu machen. Darüber hinaus wurden zur quantitativen Analyse der Sakkadenrichtungen drei Maße herangezogen: die Resultantenlänge, die Full Width at Half Maximum (FWHM) sowie der Konzentrationsparameter.

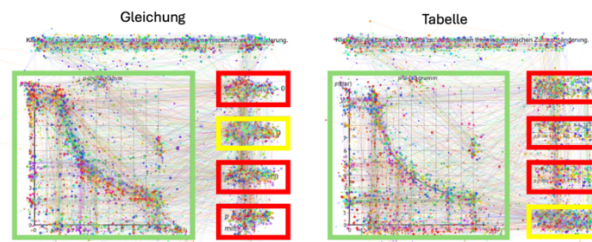


Abb. 2 Beispielitems mit Blickpfaden und markierten AOIs zur Untersuchung der Leseart beim Darstellungswechsel vom Diagramm zur Gleichung (links) sowie vom Diagramm zur Tabelle (rechts).

Beantwortungshäufigkeit

Abbildung 3 zeigt die absoluten Häufigkeiten der Antworten. Unterhalb der Balken sind die in Abbildung 2 dargestellten Antwortoptionen den jeweiligen Aufgaben zugeordnet. Bei der Zuordnung der Tabelle zum Diagramm bearbeiteten nahezu alle Teilnehmenden die Aufgabe korrekt; lediglich drei Personen wählten eine falsche Option. Bei der Zuordnung der Gleichung erreichte hingegen nur etwas mehr als die Hälfte die richtige Lösung, während ein erheblicher Anteil Antwortoption 3 auswählte. Die Auswertung der Interviewdaten deutet darauf hin, dass diese Wahl auf die Darstellung des Funktionsgraphen im Diagramm im Intervall von 0 bis 10 zurückzuführen ist.

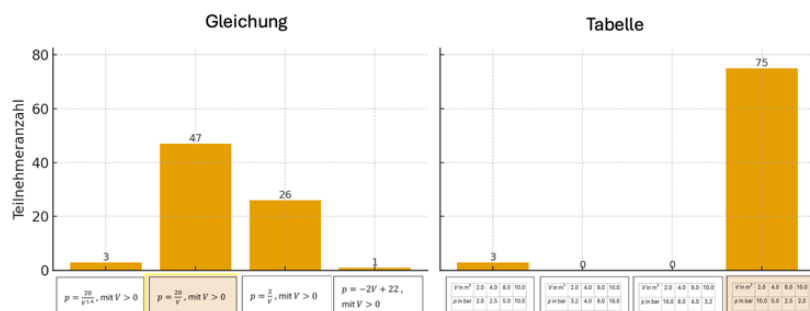


Abb. 3 Absolute Häufigkeiten der Antwortoptionen zu den in Abbildung 3 dargestellten Aufgaben. Die jeweils richtige Antwort ist gelb markiert.

Sakkadenrichtungen

Die jeweiligen Kerndichteschätzungen (KDE) der Sakkadenrichtungen sind in Abbildung 4 dargestellt. Die orangefarbene Kurve repräsentiert die Gleichungsaufgabe, die blaue Kurve die Tabellenaufgabe. Es zeigt sich, dass bei beiden Aufgaben überwiegend horizontale und vertikale Sakkaden auftreten, wobei die Richtungsverteilungen in der Gleichungsaufgabe breiter ausgeprägt sind. Dies bestätigen auch die berechneten Maße. Die Resultantenlängen unterscheiden sich nur geringfügig (Gleichung: $R = 0,024$; Tabelle: $R = 0,023$). Betrachtet man jedoch die Hauptpeaks der Verteilungen, die bei der Gleichungsaufgabe bei 0° und bei der Tabellenaufgabe bei 90° liegen, wird im FWHM ein deutlicher Unterschied sichtbar (Gleichung: 60° ; Tabelle: 90°). Eine größere Streuung der Richtungen in der Gleichungsaufgabe zeigt sich zudem im Konzentrationsparameter (Gleichung: 20,09; Tabelle: 21,09).

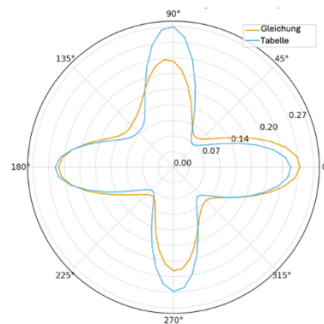


Abb. 4 Kerndichteschätzungen der Sakkadenrichtungen in der Gleichungsaufgabe (orangefarbene Kurve) und der Tabellenaufgabe (blaue Kurve).

Diskussion und Fazit

Im Rahmen der Forschungsfrage zeigen sich differenzierte Muster in den Blickbewegungen. Der Wechsel zum algebraischen Ausdruck ist durch eine größere Streuung in den Richtungsverteilungen gekennzeichnet, was sich in einer erhöhten FWHM und einem niedrigeren Konzentrationsparameter widerspiegelt. Diese breitere Verteilung deutet auf weniger fokussierte Blickbewegungen hin und kann als Ausdruck erhöhter kognitiver Belastung sowie größerer Unsicherheit bei der Aufgabenbearbeitung interpretiert werden. Unterstützt wird diese Annahme durch die niedrigere Beantwortungshäufigkeit, die im Vergleich zur Tabellenzuordnung beobachtet wurde. Insgesamt wird deutlich, dass die Fähigkeit zur Generalisierung zwischen graphischen und algebraischen Darstellungen bei den Lernenden bislang nur unzureichend ausgeprägt ist. Im physikalischen Kontext äußert sich dies insbesondere darin, dass Lernende Schwierigkeiten haben, anhand der unterschiedlichen Darstellungsformen isotherme von adiabatischen Zustandsänderungen zu unterscheiden. Der Einsatz von Eye-Tracking bietet in diesem Zusammenhang nicht nur wertvolle diagnostische Einblicke in die Art und Weise, wie Darstellungswechsel vollzogen werden, sondern eröffnet zugleich didaktisches Potenzial. So kann die Analyse von Blickbewegungen gezielt genutzt werden, um Lernprozesse sichtbar zu machen und darauf aufbauend Fördermaßnahmen zu entwickeln.

Literatur

- Adila, A. S. D., Sutopo & Wartono. (2018). Students' reasoning in analyzing temperature from PV diagram representing unfamiliar thermodynamics process. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097, 012012. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012012>
- Fehlinger, P., Becker-Genschow, S. & Watzka, B. (2025). Gaze behavior as a key to revealing strategies for identifying indirectly proportional graphs in thermodynamic and mathematical context. *Physical Review Physics Education Research*, 21(2), 020129.
- Geyer, M. A. & Pospiech, G. (2015). Darstellungen funktionaler Zusammenhänge im Physikunterricht- Darstellungswechsel in der Sekundarstufe 1. *PhyDid B-Didaktik der Physik-Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*.
- Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive science*, 11(1), 65-100.
- Saepuzaman, D., Sriyansyah, S. P. & Karim, S. (2019). Unpacking pre-service physics teachers' understanding of the PVT diagram and the associated mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1204, 012032.