

Mathematisierung: Vergleich zweier Herangehensweisen zum Einführen von Formeln

Motivation: Mathematik im Physikunterricht

Physiklehrkräfte beklagen häufig unzureichende Mathematikkenntnisse, die zu Problemen im Umgang mit Formeln im Physikunterricht führen. Auch Uhden (2012) beobachtete eine Vielzahl von Schwierigkeiten im Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht. Neben den teils unzureichenden Fähigkeiten der Lernenden im technischen Umgang – wie beispielsweise bei algorithmischen Umformungen – tragen auch unterschiedliche Wesenszüge der Mathematik im Mathematik- und Physikunterricht wesentlich zum Problem bei. Heck und van Buuren (2019) sowie Karam et al. (2019) weisen auf mehrere physikspezifische Besonderheiten hin: In Formeln wie der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = f \cdot \lambda$ handelt es sich im Gegensatz zu einer typischen mathematischen Funktion bei den Variablen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nicht um unabhängige Größen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit für ein bestimmtes Material einen festen Wert annimmt, können Werte für die Wellenlänge λ und die Frequenz f nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Darüber hinaus können Konzepte aus der Mathematik – wie beispielsweise die Anteilsvorstellung des Zählers als Teil des Nenners bei Brüchen – zu Fehlvorstellungen in der Physik führen: Wird bei der Definition des elektrischen Widerstands $R = \frac{U}{I}$ der Zähler als Teil des Nenners interpretiert, also die Spannung als Teil der Stromstärke aufgefasst, kann diese eine lernhinderliche Vorstellung begünstigen.

Letztlich gibt es mehrere Gründe, weshalb der Transfer von Wissen aus dem Mathematikunterricht auf den Physikunterricht Lernenden nicht gelingt. Zunächst ist das entsprechende Wissen im Mathematikunterricht domänenspezifisch verankert und wird nicht automatisch auf ein anderes Fach übertragen (Planinic et al., 2019). Lernende glauben teils sogar, dass sie dieses Wissen nicht übertragen dürfen. Woolnough (2000) berichtet beispielsweise, dass Lernende annehmen, es sei unzulässig, mit dimensionsbehafteten Größen genauso zu rechnen wie mit reellen Zahlen. Zuletzt weist die Mathematik im Physikunterricht eben auch fachspezifische Wesenszüge auf, die aus dem Mathematikunterricht nicht bekannt sind (Heck & van Buuren, 2019; Karam et al., 2019).

Förderung mathematischer Fähigkeiten im Physikunterricht

Es erscheint daher naheliegend, mathematische Fähigkeiten explizit auch im Physikunterricht zu fördern. Dabei wird im Wesentlichen zwischen einem technischen Einsatz der Mathematik in der Physik – mit starkem Fokus auf algebraische Umformungen und teils kontextloser Analysis – und einem strukturellen Einsatz unterschieden (Pietrocola, 2008). Der strukturelle Einsatz der Mathematik stellt die enge Verbindung zwischen der mathematischen Formulierung der damit beschriebenen physikalischen Situation in den Mittelpunkt. So könnte beispielsweise aus dem physikalischen Zusammenhang heraus die genaue Zusammensetzung und Form der mathematischen Formel begründet werden. Mithilfe dieser Formel ließen sich zudem Vorhersagen für die physikalische Situation treffen (Karam, 2014).

Ein zentraler Aspekt des strukturellen Einsatzes der Mathematik ist das Verstehen einer Formel, was im Zentrum des sogenannten Blended Sensemakings steht. Zhao und Schuchardt

(2021) fassen in einem Rahmenmodell den bisherigen Forschungsstand zum (Blended) Sensemaking zusammen. Für ein tiefes Verständnis einer Formel sind neben grundlegenden technischen Fähigkeiten auch das Anknüpfen an mathematische Grundvorstellungen (vom Hofe, 1992; Sherin, 2001), Wissen über die vorkommenden Größen oder die Berücksichtigung des Kontextes notwendig (Redish & Kuo, 2015).

Dieses tiefere Verständnis einer Formel und der Fokus auf einen strukturellen Einsatz der Mathematik im Physikunterricht eröffnen verschiedene Chancen und Potenziale: Beim technischen Einsatz der Formel wenden Lernende Formeln häufig ohne Hinterfragen der zugehörigen Physik an. In einem sogenannten „Recursive Plug-and-Chug“-Vorgehen werden Formeln iterativ ineinander eingesetzt, bis aus gegebenen Größen die Zielgröße berechnet werden kann (Tuminaro & Redish, 2007). Dabei treten jedoch häufig Fehler auf (Uhden, 2012), und die Formel trägt kaum zum physikalischen Verständnis bei. Fokussiert man hingegen auf einen strukturellen Einsatz der Mathematik, kann explizit auf die unterschiedlichen Wesenszüge zwischen der Mathematik im Mathematik- und im Physikunterricht eingegangen werden. Dadurch wird der Transfer von Wissen zwischen den Fächern unterstützt. Lernende, denen ein struktureller Einsatz im Sinne des Sensemakings gelingt, lösen physikalische Probleme effizienter und mit weniger Fehlern (Redish & Kuo, 2015). Darüber hinaus zeigte sich bei Schuchardt und Schunn (2016), dass ein intensiveres Arbeiten mit Formeln zu einem tieferen deklarativen Verständnis des physikalischen Inhalts führte als bei einer Kontrollgruppe. Die Mathematik im strukturellen Sinn ermöglicht laut Karam (2014), Vorhersagen zu treffen und Grenz- oder Spezialfälle zu diskutieren; damit bereichert ihr Einsatz den Physikunterricht.

Herangehensweisen zum Einführen von Formeln

Wenngleich es sinnvoll erscheint, das Blended Sensemakings zu fördern und in der Vergangenheit bereits erste Empfehlungen zum Umgang mit Formeln gegeben wurden (Bagno et al., 2008; Janßen & Pospiech, 2016), mangelt es Lehrkräften nach eigener Aussage weiterhin an konkreten Hilfestellungen zum Sensemaking im Physikunterricht (Pospiech et al., 2019) – insbesondere angesichts der knappen Unterrichtszeit.

Im Rahmen meines Promotionsvorhabens werden daher zwei mögliche Herangehensweisen zum Einführen von Formeln im Physikunterricht erarbeitet: das *Aufstellen einer Formel* und das *Plausibilisieren einer Formel*. Beide Ansätze orientieren sich an den Epistemic Games „Mapping Meaning to Mathematics“ und „Mapping Mathematics to Meaning“ nach Tuminaro und Redish (2007). Diese beschreiben Vorgehensweisen von Lernenden, denen ein vertieft struktureller Einsatz von Formeln im Sinne des Blended Sensemakings gelingt.

Die darauf aufbauende Instruktion zum Aufstellen der Formel lässt sich dem Inquisitory Teaching (Gorbunova et al., 2023) zuordnen. Dabei wird mithilfe gezielter Prompts durch die Lehrkraft schrittweise von den experimentellen Beobachtungen auf die mathematische Formel hingearbeitet. Dieses Vorgehen orientiert sich zudem an einem Vorschlag von Kaldaras & Wiemann (2023), nach dem Studierende mithilfe einer Simulation eine Formel selbstständig im Sinne eines vertieften Blended Sensemakings erschließen sollen.

Im alternativen Ansatz zum Plausibilisieren der Formel wird die Formel zunächst durch die Lehrkraft vorgestellt und anschließend gemeinsam mit den Lernenden analysiert. Dabei wird sie auf die zugrunde liegenden Aussagen und Bestandteile hin zerlegt und so auf die Ausgangssituation rückgeführt. Bei der Meta-Analyse zu Instruktionen von Gorbunova et al. (2023) entspricht dies dem Expository Teaching und ist trotz des Bruches in der Erarbeitung ebenfalls mit der Cognitive Load Theory nach Sweller et al. (2019) vereinbar.

In beiden Herangehensweisen können alle Elemente des Rahmenmodells zum Sensemakings nach Zhao und Schuchardt (2022) berücksichtigt werden, die selbst keine Aussage über eine zeitliche Abfolge der erforderlichen Schritte treffen.

Vergleich beider Herangehensweisen

Im Rahmen meiner Promotion sollen beide Herangehensweisen im Hinblick auf den Wissenszuwachs und die wahrgenommene kognitive Belastung untersucht und miteinander verglichen werden. Darüber hinaus werden die Einflüsse der mathematisch-strukturellen Fähigkeiten sowie des Denktyp nach der Empathizing-Systemizing-Theory (Welberg et al., 2024) untersucht werden. Besonders interessant erscheint dabei die Frage, inwieweit sich die beiden Herangehensweisen für Lernende mit einer Neigung zur empathisierenden und nicht zur systematisierenden Denkweise eignen.

Zu diesem Zweck werden zwei Versionen einer Doppelstunde entwickelt, in der aufbauend auf dem zweidimensionalen Mechanikkonzept nach Wiesner (vgl. Seiter, 2022) die Newton'sche Kraftformel $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$ eingeführt wird. Beide Versuchsgruppen erkunden mithilfe einer Simulation, wovon die Zusatzgeschwindigkeit eines Körpers bei einer Krafteinwirkung abhängt. Anschließend wird – basierend auf den gefundenen Wenn-Dann-Aussagen – gemäß der jeweiligen theoretisch erarbeiteten Herangehensweisen (vgl. Abb. 1) die passende Formel für die Zusatzgeschwindigkeit eingeführt. Im weiteren Stundenverlauf wird diese Formel in beiden Gruppen umgestellt und zur Newton'schen Kraftformel verallgemeinert.

Aufstellen der Formel	Plausibilisieren der Formel
Systematische Beschreibung der Zusammenhänge (Bezug zum Experiment)	Passenden mathematischen Ausdruck vorgeben
Mathematische Beschreibung der Zusammenhänge (Proportionalitäten, Formelbuchstaben einführen)	Systematik der Formel erkunden durch Einsetzen und Abändern von Beispielwerten
Kombination zu einem passenden mathematischen Ausdruck	Identifizieren zugrundeliegender mathematischer Konzepte
Abgleich der Systematik von Formel und Experiment durch Einsetzen und Abändern von Beispielwerten	Systematische Beschreibung der Zusammenhänge (Bezug zum Experiment)
Verknüpfen der Formel mit mathematischen Grundvorstellungen und symbolischen Formen sowie der physikalischen Situation	
Einbetten in den Kontext: Besprechen verschiedener Umstellungen der Formel, Diskutieren von Spezial- und Grenzfällen, Treffen von Vorhersagen und Interpretationen	

Abb. 1: Gegenüberstellung der Schritte beider Herangehensweisen; die Helligkeitsabstufung deutet den Komplexitätsgrad beim Umgang mit der mathematischen Formel an.

Ausblick

Derzeit befinden sich die Erhebungsinstrumente in der Finalisierung. Nach Abschluss der für das Frühjahr 2026 geplanten Pilotierung soll dann im Schuljahr 2026/27 die Hauptuntersuchung mit achten Klassen bayerischer Gymnasien durchgeführt werden.

Literatur

- Bagno, E., Berger, H. & Eylon, B.-S. (2008). Meeting the challenge of students' understanding of formulae in high-school physics: A learning tool. *Physics Education*, 43(1), 75–82.
- Gorbunova, A., Van Merriënboer, J. J. G. & Costley, J. (2023). Are inductive teaching methods compatible with cognitive load theory? *Educational Psychology Review*, 35(4), 111.
- Heck, A. & van Buuren, O. (2019). Students' understanding of algebraic concepts. In G. Pospiech, M. Michelini, & B.-S. Eylon (Hrsg.), *Mathematics in Physics Education* (S. S. 53-74). Springer International Publishing.
- Janßen, W. & Pospiech, G. (2016). Formeln physikalisch interpretieren und verstehen. Methoden und Anregungen für den Unterricht. *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*, 27. 153/154, 51–55.
- Kaldaras, L. & Wieman, C. (2023). Cognitive framework for blended mathematical sensemaking in science. *International Journal of STEM Education*, 10(1), 18.
- Karam, R. (2014). Framing the structural role of mathematics in physics lectures: A case study on electromagnetism. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 10(1).
- Karam, R., Uhden, O. & Höttecke, D. (2019). The “math as prerequisite” illusion: Historical considerations and implications for physics teaching. In G. Pospiech, M. Michelini, & B.-S. Eylon (Hrsg.), *Mathematics in Physics Education* (S. 37–52). Springer International Publishing.
- Pietrocola, M. (2008). Mathematics as structural language of physical thought. In M. Vincentini & E. Sassi (Hrsg.), *Connecting research in physics education with teacher education* (Bd. 2). I.C.P.E. Book.
- Planinic, M., Susac, A., Ivanjek, L. & Milin Šipuš, Ž. (2019). Comparing student understanding of graphs in physics and mathematics. In G. Pospiech, M. Michelini, & B.-S. Eylon (Hrsg.), *Mathematics in Physics Education* (S. 233–246). Springer International Publishing.
- Pospiech, G., Eylon, B.-S., Bagno, E. & Lehavi, Y. (2019). Role of teachers as facilitators of the interplay physics and mathematics. In G. Pospiech, M. Michelini, & B.-S. Eylon (Hrsg.), *Mathematics in Physics Education* (S. 269–291). Springer International Publishing.
- Redish, E. F. & Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, 24(5–6), 561–590.
- Schuchardt, A. M. & Schunn, C. D. (2016). Modeling scientific processes with mathematics equations enhances student qualitative conceptual understanding and quantitative problem solving. *Science Education*, 100(2), 290–320.
- Seiter, M. (2022). *Die Bedeutung der Elementarisierung für den Erfolg von Mechanikunterricht in der Sekundarstufe I* (Bd. 331). Logos Verlag.
- Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, 19(4), 479–541.
- Sweller, J., Van Merriënboer, J. J. G. & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, 31(2), 261–292.
- Tuminaro, J. & Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 3(2), 020101.
- Uhden, O. (2012). *Mathematisches Denken im Physikunterricht: Theorieentwicklung und Problemanalyse* (Bd. 133). Logos Verlag.
- vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345–364.
- Welberg, J., Laumann, D. & Heinicke, S. (2024). Measuring empathizing and systemizing in children and adolescents: Development of a German short version of the empathizing and systemizing quotient for children and adolescents. *European Journal of Psychological Assessment*, 1015-5759/a000843.
- Woolnough, J. (2000). How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics? *Research in Science Education*, 30(3), 259–267.
- Zhao, F. F. & Schuchardt, A. (2021). Development of the sci-math sensemaking framework: Categorizing sensemaking of mathematical equations in science. *International Journal of STEM Education*, 8(1), 10.